КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 Т. 2 № 4 С. 343–347

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 511.3

Оценка модуля аналога тригонометрической суммы Г. Вейля в кольце гауссовых чисел

П. Н. Сорокин

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,
Россия, 117218, Москва, проспект Нахимовский, д. 36, корп. 1

E-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Получено 27 июня 2010 г.

В работе рассматривается кольцо гауссовых чисел. Методами аналитической теории чисел доказывается оценка модуля некоторого аналога тригонометрической суммы Г. Вейля с суммированием по гауссовым числам, мультипликативная норма которых меньше целого числа.

Ключевые слова: кольцо гауссовых чисел, тригонометрические суммы Г. Вейля

Estimate of the module of analogue Weyl's trigonometrical sum in ring of Gaussian numbers

P. N. Sorokin

Scientific-Research Institute for System Studies, Russian Academy of Sciences (NIISI RAN), Nakhimovskii av. 36-1, Moscow, 117218, Russia

Abstract. – The ring of Gaussian numbers is considered. The estimation of the module of some analogue of Weyl's trigonometrical sum with summation on Gaussian numbers is proved by methods of the analytical number theory. Multiplicative norm of Gaussian numbers is less than some integer.

Keywords: ring of Gaussian numbers, trigonometrical sums of G.Weyl

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 343–347 (Russian).

Пусть $\mathbb{Z}[i]=\{z\in C \mid z=x+iy, x\in Z, y\in Z\}$ – кольцо гауссовых чисел, $Nz=|z|^2$ – мультипликативная норма в этом кольце.

Рассмотрим следующий аналог тригонометрической суммы Г. Вейля [Виноградов, 1971]:

$$S(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)=\sum_{N\lambda<P} e^{\pi i Sp(f(\lambda))}, \qquad (1)$$

где $f(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\cdots+\alpha_1\lambda$, $\alpha_n,\ldots,\alpha_1\in C$, $\lambda\in Z[i]$, $Sp(\varsigma)=2\operatorname{Re}(\varsigma)$, $\varsigma\in C$, P – целое число, превосходящее единицу.

Каждому $s=n,\ldots,2$ поставим в соответствие число $\tau_s=P^{(s-0,5)/2}$. Коэффициенты α_s многочлена $f(\lambda)$ представимы (это всегда возможно [Виноградов, 1971]) в следующем виде:

$$\alpha_s=\left(\frac{a_s^R}{q_s^R}+\frac{\theta_s^R}{q_s^R\tau_s}\right)+i\left(\frac{a_s^I}{q_s^I}+\frac{\theta_s^I}{q_s^I\tau_s}\right),$$

где $a_s^R,q_s^R,a_s^I,q_s^I\in Z$, $(a_s^R,q_s^R)=1$, $(a_s^I,q_s^I)=1$, $0<q_s^R\le\tau_s$, $0<q_s^I\le\tau_s$, $\theta_s^R,\theta_s^I\in R$, $0\le\left|\theta_s^R\right|\le 1$, $0\le\left|\theta_s^I\right|\le 1$, $s=n,\ldots,2$.

Пусть Q_0^R и Q_0^I – наименьшие общие кратные чисел $q_n^R,\ldots,q_2^R$ и $q_n^I,\ldots,q_2^I$ соответственно.

Каждому гауссовому числу μ соответствует своя точка $\Gamma(\mu)=(\Gamma_{n-1}^R(\mu),\ldots,\Gamma_1^R(\mu),$ $\Gamma_{n-1}^I(\mu),\ldots,\Gamma_1^I(\mu))$, $\Gamma_1^R(\mu),\Gamma_1^I(\mu)\in R$ прямого произведения пространств R и I размерности $(n-1)$, определенная разложением

$$f(\lambda+\mu)-f(\mu)=\alpha_n\lambda^n+(\Gamma_{n-1}^R(\mu)+i\Gamma_{n-1}^I(\mu))\lambda^{n-1}+\cdots+(\Gamma_1^R(\mu)+i\Gamma_1^I(\mu))\lambda,$$

где $f(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1\lambda$, $\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1\in C$, $\lambda\in Z[i]$.

Теорема. *Пусть имеют место следующие ограничения:* $n\ge 5$, $P\ge n^{n^2}$, $Q_0^R>P^{0,25-0,2\nu}$, $Q_0^I>P^{0,25-0,2\nu}$, $\nu=\dfrac{1}{n}$. *Число* ρ *определяется следующей формулой:*

$$\rho^{-1}=8n^2\left(\ln n+0,5\ln\ln n+0,75\right).$$

Тогда для аналога тригонометрической суммы (1) имеем:

$$|S(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)|<c(n)P^{1-\frac{\rho}{2}},\ \textit{где}\ c(n)=2^{4n+5}n^{2n+12}.$$

Доказательство. Пусть Y – целая часть $P^{1-\rho}$. Каждому числу $\mu\in Z[i], N\mu\le Y$ поставим в соответствие область $\Omega'(\mu)$, состоящую из точек $\gamma(\mu)=(\gamma_{n-1}^R(\mu),\ldots,\gamma_1^R(\mu),\gamma_{n-1}^I(\mu),\ldots,\gamma_1^I(\mu))$ прямого произведения пространств R и I размерности $(n-1)$, ограниченную неравенствами:

$$\Gamma_j^R(\mu)-\frac{1}{2}L_jP^{-\frac{\rho}{2}}\le\gamma_j^R\le\Gamma_j^R(\mu)+\frac{1}{2}L_jP^{-\frac{\rho}{2}},\ \Gamma_j^R(\mu)=P^{-j/2},\ j=1,\ldots,n-1,$$

$$\Gamma_j^I(\mu)-\frac{1}{2}L_jP^{-\frac{\rho}{2}}\le\gamma_j^I\le\Gamma_j^I(\mu)+\frac{1}{2}L_jP^{-\frac{\rho}{2}},\ \Gamma_j^I(\mu)=P^{-j/2},\ j=1,\ldots,n-1.$$

Пусть $\Omega(\mu)$ – область точек $\eta(\mu)=(\eta_{n-1}^R(\mu),\ldots,\eta_1^R(\mu),\eta_{n-1}^I(\mu),\ldots,\eta_1^I(\mu))$, сравнимых с точками области $\Omega'(\mu)$ и лежащих в области $\Pi_{2(n-1)}=\left([0,1]\times[0,i]\right)^{n-1}\in C^{n-1}$. Согласно оценке кратности пересечения окрестностей гауссовых чисел [Сорокин, 2009] число K областей $\Omega(\mu)$, пересекающихся с фиксированной областью $\Omega(\mu_0)$, удовлетворяет неравенству $K<2n^{4n-4}P^{0,75+0,4\nu}$. Поэтому среди областей $\Omega(\mu)$ найдется более чем $\frac{2Y+2}{K} > \frac{P^{0,25-\rho-0,4\nu}}{n^{4n-4}}$ непересекающихся. Пусть Ω – область, покрытая непересекающимися областями. Объем V области Ω удовлетворяет неравенству:

$$V > \frac{P^{0,25-\rho-0,4\nu}}{n^{4n-4}} \cdot P^{-\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)\rho} > n^{4-4n} P^{-\frac{n(n-1)}{2}-n\rho+0,25-0,4\nu} > n^{4-4n} P^{-\frac{n(n-1)}{2}+0,25-0,5\nu}.$$

Пусть $S(\mu) = \sum_{N\lambda<P} e^{i\pi Sp(f(\lambda+\mu)-f(\mu))}$, $S(\alpha) = \sum_{N\lambda<P} e^{i\pi Sp(f(\lambda))}$. Используя свойство суммы Г. Вейля по гауссовым числам [Сорокин, 2008], получим

$$\left|S(\alpha)e^{-i\pi Sp(f(\mu))} - S(\mu)\right| = \left|\sum_{N\lambda<P} e^{i\pi Sp(f(\lambda))} - \sum_{N\lambda<P} e^{i\pi Sp(f(\lambda+\mu))}\right| < 5\pi P^{1-\rho}.$$

Пусть $S(\eta(\mu)) = \sum_{N\lambda<P} e^{i\pi Sp(\alpha_n\lambda^n + (\eta_{n-1}^R + i\eta_{n-1}^I)\lambda^{n-1} + \ldots + (\eta_1^R + i\eta_1^I)\lambda)}$. Используя свойство суммы Г. Вейля по гауссовым числам [Сорокин, 2008] с параметром $t = \frac{1}{\sqrt{2}} P^{-\frac{\rho}{2}}$, имеем $\left|S(\mu) - S(\eta(\mu))\right| < 4\sqrt{2}(n-1)\pi P^{1-\frac{\rho}{2}}$. Отсюда

$$\left|S(\alpha)e^{-i\pi Sp(f(\mu))} - S(\eta(\mu))\right| \le \left|S(\alpha)e^{-i\pi Sp(f(\mu))} - S(\mu)\right| + \left|S(\mu) - S(\eta(\mu))\right| \le$$

$$\le 5\pi P^{1-\rho} + 4\sqrt{2}(n-1)\pi P^{1-\frac{\rho}{2}} < 4\sqrt{2}n\pi P^{1-\frac{\rho}{2}}.$$

Предположим, что $\left|S(\alpha)\right| = \left|S(\alpha)e^{-i\pi Sp(f(\mu))}\right| > c(n)P^{1-\frac{\rho}{2}}$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию. Итак, имеем

$$\left|S(\eta(\mu))\right| > c(n)P^{1-\frac{\rho}{2}} - 4\sqrt{2}\pi n P^{1-\frac{\rho}{2}} = (c(n) - 4\sqrt{2}\pi n)P^{1-\frac{\rho}{2}}.$$

Тогда

$$\iint_{\Pi_{2(n-1)}} \left|S(\eta(\mu))\right|^{2k} d\eta \ge \iint_{\Omega} \left|S(\eta(\mu))\right|^{2k} d\eta = V \cdot (c(n) - 4\sqrt{2}\pi n)^{2k} P^{2k(1-\frac{\rho}{2})}.$$

Также известно, что

$$\iint_{\Pi_{2(n-1)}} \left|S(\eta(\mu))\right|^{2k} d\eta \le \iint_{\Pi_{2(n-1)}} \left|S(\eta_{n-1},\ldots,\eta_1))\right|^{2k} d\eta = J(P; n-1, k).$$

По теореме о среднем значении [Сорокин, 2007] имеем

$$J(P; n-1, k) = J(P; n-1, k_s) \le D_{k_s} P^{2k_s - \Delta_s}.$$

Тогда

$$D_{k_s} P^{2k_s-\Delta_s} > V \cdot (c(n) - 4\sqrt{2}\pi n)^{2k_s} P^{2k_s(1-\frac{\rho}{2})},$$

$$V < D_{k_s} (c(n) - 4\sqrt{2}\pi n)^{-2k_s} P^{k_s\rho - \Delta_s}.$$

Итак, мы получаем неравенства

$$n^{4-4n} P^{-\frac{n(n-1)}{2}+0,25-0,5\nu} < V < D_{k_s} (c(n) - 4\sqrt{2}\pi n)^{-2k_s} P^{k_s\rho-\Delta_s}.$$

Покажем, что имеют место следующие неравенства:

$$n^{4-4n} > D_{k_s}(c(n) - 4\sqrt{2}\pi n)^{-2k_s},$$

$$-\frac{n(n-1)}{2} + 0,25 - 0,5\nu > k_s\rho - \Delta_s.$$

Эти неравенства перепишем так:

$$c(n) > 4\sqrt{2}\pi n + \sqrt[2k_s]{D_{k_s}} \cdot n^{\frac{2(n-1)}{k_s}}, \tag{2}$$

$$\Delta_s > \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + k_s\rho. \tag{3}$$

Мы знаем, что существует номер $s = s_0$, начиная с которого $\Delta_s = \Delta_{s_0} \ge \frac{n^2}{2}$ [Сорокин, 2008]. Возьмем $s_1 = \max(n-1, s_0)$, тогда верны неравенства:

$$n + \frac{n}{2}(n-1) \le k_s \le n + (n-1)n,$$

то есть

$$\frac{n(n+1)}{2} \le k_s \le n^2. \tag{4}$$

Докажем сначала неравенство (3). Покажем, что

$$\frac{n^2}{2} > \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + k_s\rho. \tag{5}$$

Учитывая (4) и подставляя значение ρ из условия теоремы, получаем

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - k_s\rho \ge \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8(\ln n + 0,5\ln\ln n + 0,75)} > 0$$

при $n \ge 2$. Тогда неравенство (5) верно. В силу выбора k_s имеем $k_s \ge k_{s_0}$. Отсюда $\Delta_s \ge \frac{n^2}{2}$. Неравенство (3) доказано. Случай, когда $s_1 = s_0$, рассмотрен в работе [Тырина, 1989].

Теперь докажем неравенство (2). Имеем $s = n-1$. Тогда

$$D_k = D_{k_{n-1}} = 2^{\sum_{i=1}^{n-2}\left(\Delta_i + \frac{n(n-1)}{2}\right)}(2n)^{2\Delta_{n-1}r_{n-1}}(4k_{n-1})^{2\left(k_{n-1} + \frac{2k_{n-1}}{n}\right)}.$$

С учетом свойств последовательностей $\{\Delta_s\}$ и $\{r_s\}$, а также условия (4) получим

$$D_{k_s} \le 2^{n^2(n-2)}(2n)^{n^2(n+1)}(4n^2)^{2(n^2+2n)} = 2^{2n^3+3n^2+8n}n^{n^3+5n^2+8n},$$

$$D_{k_s}n^{4(n-1)} \le 2^{2n^3+3n^2+8n}n^{n^3+5n^2+12n-4}.$$

При выборе $\frac{1}{2k_s}$ мы берем минимальное значение $k_s = \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда

$$\sqrt[2k_s]{D_{k_s}}\, n^{\frac{2(n-1)}{k_s}} \le 2^{\frac{4n^2+6n+16}{n+1}} \cdot n^{\frac{2n^3+10n^2+24n-8}{n(n+1)}}.$$

Остается проверить, что

$$\sqrt[2k_s]{D_{k_s}}\, n^{\frac{2(n-1)}{k_s}} + 4\sqrt{2}\pi n < c(n) = 2^{4n+5} \cdot n^{2n+12}.$$

Действительно,

$$\sqrt[2k_s]{D_{k_s}}\, n^{\frac{2(n-1)}{k_s}} + 4\sqrt{2}\pi n \le 2^{\frac{4n^2+6n+16}{n+1}} \cdot n^{\frac{2n^3+10n^2+24n-8}{n(n+1)}} + 18n =$$

$$= 2^{(4n+2)\frac{14}{n+1}} \cdot n^{(2n+8)+\frac{16n-8}{n(n+1)}} + 18n < 2^{4n+5} \cdot n^{2n+11} + 18n < 2^{4n+5} \cdot n^{2n+12} = c(n),\ n \ge 5 .$$

Неравенство (2) доказано. □

Список литературы

Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. – Москва: Наука, 1971.

Сорокин П. Н. Теорема о среднем И. М. Виноградова для тригонометрической суммы по гауссовым числам // Вестник Московского университета, сер. 1, Математика. Механика. – М. – 2007. – № 6. – С. 63–65.

Сорокин П. Н. Средние значения тригонометрических сумм в кольце гауссовых чисел: дис. канд. физ.-мат. наук. – М. – 2008.

Сорокин П. Н. Диофантово неравенство И. М. Виноградова в кольце гауссовых чисел // Математика. Образование. Культура, Сборник трудов 4-ой международной конференции, ч. 1, математика и ее приложения. – Тольятти. – 2009. – С. 7–11.

Тырина О. В. Средние значения тригонометрических сумм: дис. канд. физ.-мат. наук. – М. – 1989.