

УДК: 311.175+330.101.2+314.148

## Аналоги фазовых переходов в экономике и демографии

Ю. Л. Словохотов

Государственное учебно-научное учреждение  
Химический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова  
119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1., стр. 3

E-mail: slov@phys.chem.msu.ru

Получено 22 апреля 2010 г.

Рассмотрены эмпирические аналогии между кризисными процессами в социальных системах и фазовыми переходами с сопутствующими им критическими явлениями в «неживых» физических системах. Представлены качественное модельное описание историко-демографического прогресса (постепенная конденсация хозяйственных доменов с улучшением условий жизни населения), без дополнительных допущений объясняющее гиперболический рост населения Земли в I–XX вв. н. э., и модель современного мирового экономического кризиса как следствия спонтанной «конденсации капиталов», создавшей неуправляемые хозяйственные конгломераты, при свободной экспансии американской экономики в 1990-х и 2000-х гг. с ослаблением конкуренции («расширение в пустоту»).

Ключевые слова: социальные системы, фазовый переход, критические явления, кризис, демография, экономика

### Phase transitions associated with economy and demography

Yu. L. Slovokhotov

Chemistry Department, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

**Abstract.** – Crises in social systems are considered by analogy with phase transitions and the corresponding critical phenomena in «non-living» many-particle physical systems. We present two qualitative physical models: (i) a historical and demographic progress as a gradual condensation of economical domains with an improvement of living conditions, and (ii) the modern economical crisis as a result of a spontaneous «condensation» of assets in a free expansion of the U.S. economy in 1990th and 2000th, reducing a control over large business enterprises formed in this process. The first model explains the observed hyperbolic growth of world population in the I–XX centuries A.D. without any additional assumption while the second model points to the analogy between the economic expansion with a drop of competition, and the expansion of gas into vacuum with a drop of temperature.

Keywords: social systems, phase transition, critical phenomena, crisis, demography, economy

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 209–218 (Russian).

## Введение

Одним из наиболее актуальных и перспективных направлений современного естествознания является использование физических моделей в исследовании различных аспектов деятельности человеческого общества. Разделы «социальной физики» (как можно условно назвать эту возникающую дисциплину) включают анализ экономических [Stanley et al., 2000, Чернавский и др., 2002; Романовский и Романовский, 2007; Мантенья и Стенли, 2009], исторических [Чернавский и др., 2005; Митюков, 2007], демографических [Капица, 1999; Коротаев и др., 2005] и политических явлений [Vicsek, 2003; Fronczak et al., 2006] методами, ранее развитыми в других областях физики сложных систем. Широта и практическая значимость новой дисциплины отражаются в разнообразии породивших ее наук (математическая экономика и экономическая физика, биофизика и эволюционная биология, математическая история, синергетика и др.), а масштабы фундаментальных проблем, которые следует решить при физически корректном описании человеческого общества, характеризуют важность «социальной физики» для всего естествознания в целом.

Стремление интерпретировать и моделировать общественные процессы методами физики основано на сходстве поведения системы  $N$  взаимодействующих индивидуумов («живых частиц», или «агентов») с динамикой сложных многочастичных систем в химии, молекулярной биологии и материаловедении, для которых уже развито содержательное физическое описание. Предметом настоящей работы являются эмпирические аналогии между процессами, сопутствующими кризисным явлениям в обществе, и фазовыми переходами в «неживых» физических системах. В этой статье мы будем называть *социальной системой* совокупность большого числа взаимосвязанных агентов (индивидуумов, коллективов, экономических и политических субъектов), действия которых направляются индивидуальными стратегиями, и рассматривать кризис как переход социальной системы из одного структурированного состояния («фазы») с определенными измеряемыми параметрами в другое такое состояние.

## Критические явления при фазовых переходах

Фазовые переходы, наблюдаемые в разнообразных «неживых» полидоменных системах (конденсация газов, кристаллизация, адсорбция, конформационные превращения полимеров, образование магнитных, сегнетоэлектрических, жидкокристаллических фаз и др.) в близкой окрестности точки перехода имеют следующие общие признаки:

- (1) мозаичное строение возникающей фазы и масштабная инвариантность распределения ее доменов по размерам,
- (2) расходящаяся (гиперболическая) зависимость среднего размера домена новой фазы и связанных с ним критических параметров образца от управляющего параметра с приближением к точке перехода.

Характерным признаком фазового перехода может служить именно гиперболическая зависимость параметров системы от интенсивного управляющего параметра (температуры, давления, внешнего поля) вблизи критической точки, спрямляемая в двойных логарифмических координатах [Стенли, 1973] (рис. 1). В ряде сложных систем образец вещества превращается в новую фазу лишь частично и в некотором конечном интервале значений управляющего параметра, а обратный переход сопряжен с гистерезисом – таковы, например, конформационные переходы в полимерах [Тагер, 2007].

«Мозаичный» механизм фазового перехода и общий характер зависимости состояния системы от управляющего параметра малочувствительны как к конкретному виду потенциала межчастичных взаимодействий (ключевым фактором является лишь наличие области притяжения), так и к природе внешних условий, ограничивающих глубину превращения фаз. Формальные аналоги фазовых переходов отмечаются для модельных систем из взаимосвязанных «живых частиц» – в частности, как спонтанные корреляции движения рыб и птиц в стае [Tu, 2000] или стратегий биржевых агентов [Matassini and Franci, 2001].

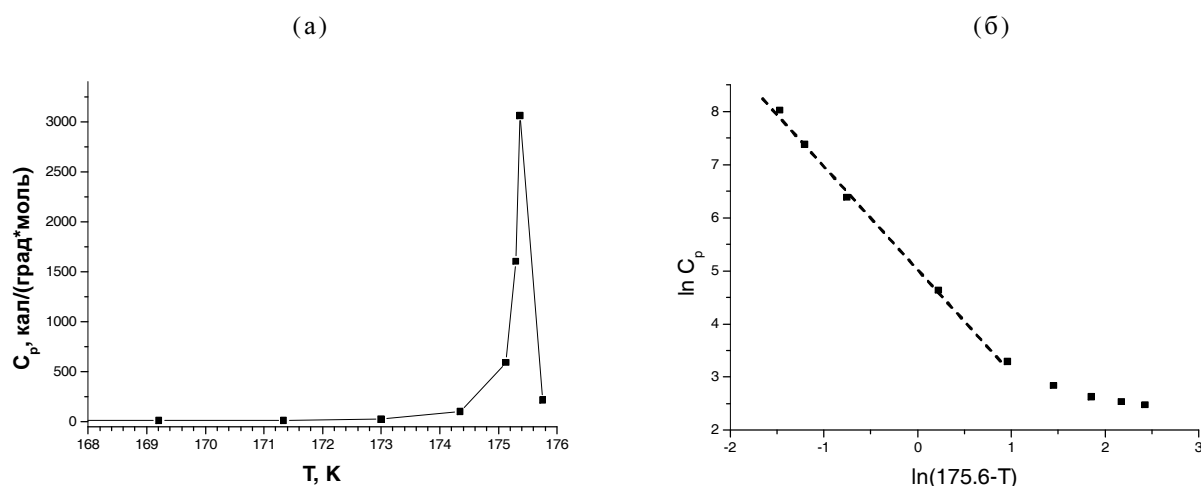


Рис. 1. (а) Изменение теплоемкости образца  $c_p$  вблизи точки плавления метанола ( $T_0 = 175.6$  K) [Carlson and Westrum, 1971], (б) спрямление графика зависимости  $c_p(T)$  в двойных логарифмических координатах ( $c_p \rightarrow A/(T_0 - T)^\gamma$ , где  $\ln A = 5.08(6)$ ,  $\gamma = 1.92(6)$ ,  $R = 0.9987$ )

Более глубокие аналогии с фазовыми переходами основаны на мозаичной структуре больших социальных систем и на масштабной инвариантности размеров «социальных доменов», установленной в ряде общественных и экономических дисциплин (закон Ципфа для численности населения городов, закон Парето для распределения населения страны по благосостоянию и др. [Романовский и Романовский, 2007]). Кроме того, для социальных систем характерны движение той или иной «наполняющей субстанции» (товаров, денег, людей) между доменами, изменение размеров доменов, их разделение или слияние. Также известно, что кризисные явления в экономике и обществе сопровождаются расходящимся, т. е. гиперболическим трендом некоторых объективно измеряемых параметров («режим с обострением» [Малинецкий, 2007]). Правомерно предположить, что с физической точки зрения по крайней мере некоторые социальные системы – в частности, экономические – в историческом масштабе времени находятся главным образом в окрестностях ограниченных фазовых переходов с сопутствующими им критическими явлениями. Для обоснования такой аналогии следует указать связь «гиперболической» динамики, твердо установленной для некоторых кризисных явлений, с конденсационными процессами в соответствующих социальных системах, и ввести для них интенсивный управляющий параметр («социальную температуру»), непрерывно (в первом приближении линейно) изменяющийся во времени.

## Гиперболический рост населения мира и демографический переход

Общий гиперболический рост численности населения Земли в XVII–XX вв., установленный по результатам переписей населения, обсуждается и моделируется с 1960-х гг. [Капица, 1999; Коротаяев и др., 2005] (рис. 2а). Большинство математических моделей, позволяющих воспроизвести наблюдаемый тренд, восходит к очень спорной работе Кремера [Cremer, 1993], объяснившего эмпирическую зависимость  $P \sim (t_0 - t)^{-1}$  численности человечества  $P$  от времени  $t$  на основе ряда сомнительных допущений (см. далее). Указанному тренду в целом не противоречат оценки численности человечества в докапиталистическую эпоху, сделанные по историческим и археологическим источникам, однако совокупность демографических данных и оценок за два последних тысячелетия лишь условно линейаризуется в двойных логарифмических координатах (рис. 2б).

Замедление темпов роста с 1970-х гг. и прогнозируемую стабилизацию численности человечества в будущем («демографический переход») обычно объясняют общемировым ростом нацио-

нального дохода и связанными с ним успехами всемирного образования и здравоохранения [Коротаев и др., 2005]. Эта концепция переносит на всю планету специфические условия высокоразвитых стран, составляющих менее 20 % от ее населения. Отметим, что демографическая политика большинства остальных стран (государственное ограничение рождаемости для предотвращения голода), по-видимому, обусловившая наблюдаемую динамику, неплохо объясняет и продолжающееся замедление прироста мирового населения при снижении уровня жизни на большей части планеты, вызванном «глобализацией» (рис. 3). Вопрос о причинах и перспективах наблюдаемой демографической динамики весьма политизирован и требует объективного анализа.

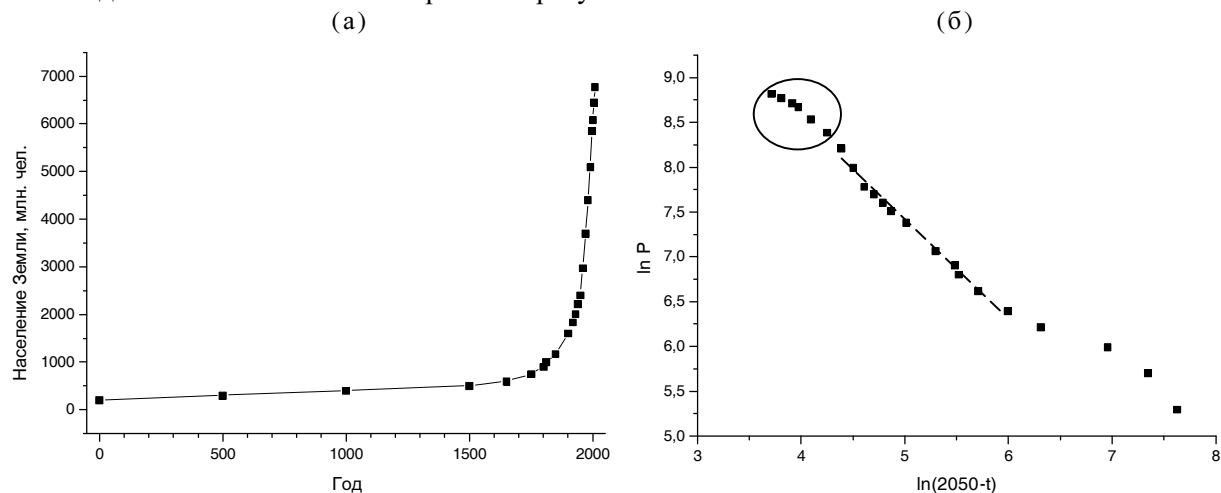


Рис. 2. (а) Зависимость численности населения Земли в I и II тысячелетиях н. э. от времени [Коротаев и др., 2005; United Nations, 2008], (б) те же данные в двойных логарифмических координатах. Штриховая линия – функция  $P = 293600/(2050 - t)^{1.03}$  для интервала 1650–1970 гг. ( $R = 0.9926$ ); выделенная область – замедление прироста с 1970-х гг.

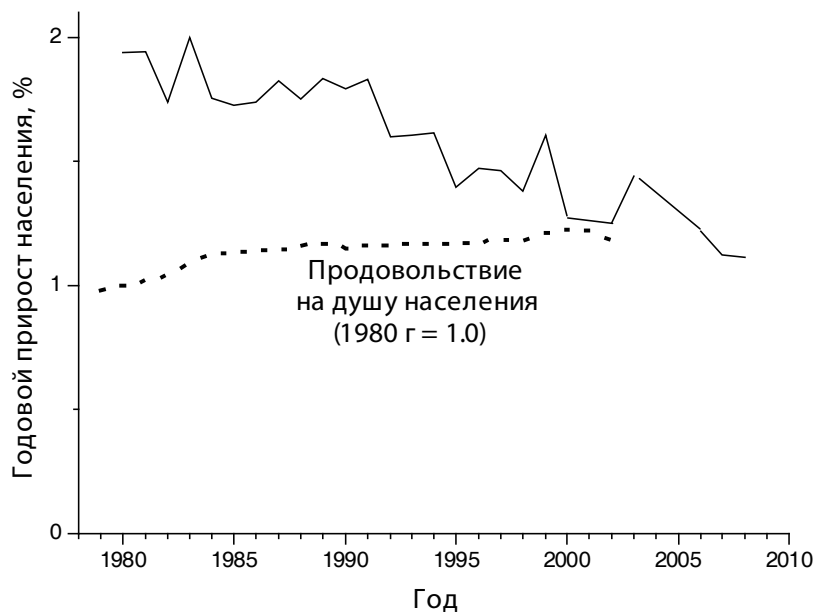


Рис. 3. Верхний график: прирост населения развивающихся стран Азии и Тихоокеанского региона (без Австралии, Новой Зеландии, России и Японии) в 1980–2008 гг., %. Нижний график: производство продовольствия на душу населения в этих странах от уровня 1980 г. с вычитанием вклада бывших советских республик [United Nations, 2010]

Прирост биологической популяции за единицу времени  $\Delta P/\Delta t$  в благоприятных условиях пропорционален первой степени ее численности  $P$ . Интегрирование этого простого уравнения дает

экспоненциальный рост популяции, который действительно наблюдается до включения «мальтузианских» ограничивающих факторов (перенаселения, недостатка пищи, загрязнений среды)

$$dP/dt = \kappa P, \text{ так что} \quad (1a)$$

$$P = A \cdot \exp(\kappa t), \quad (1b)$$

где  $P$  – численность популяции,  $t$  – время. Заменяя в (1a) линейную зависимость прироста от численности более общей степенной зависимостью и полагая  $\kappa = 1$ , имеем

$$dP/dt = P^\alpha, \text{ поэтому} \quad (2a)$$

$$P = (t/\beta + C)^\beta, \quad (2b)$$

(где  $\beta = 1/(1 - \alpha)$ ,  $\beta C$  – константа интегрирования). При  $0 < \alpha < 1$  уравнение (2b) соответствует параболической, а при  $\alpha > 1$  – расходящейся гиперболической зависимости  $P(t)$ . Таким образом, подставив в правую часть уравнения (1a) вместо численности популяции  $P$  произведение  $P \cdot X(P)$ , где новая переменная  $X$  сама является возрастающей функцией от  $P$ , мы немедленно получаем гиперболический (в общем случае сложный) рост популяции во времени (доказывается разложением  $X(P)$  в ряд Тейлора). Подобная подстановка и была сделана Кремером [Cremer, 1993]; при этом  $P$  была названа численностью населения Земли, а новая переменная  $X$  – уровнем технологий, пропорциональным численности населения (поскольку ему пропорционально число изобретателей, совершенствующих технологии). В цитируемой работе автор прямо постулировал свободное перемещение информации и активное внедрение изобретений в населенной части суши во все времена, начиная с доисторических, и косвенно (используя функцию Кобба–Дугласа) допускал свободное замещение труда капиталом во весь указанный период. Мальтузианские факторы в цитируемой работе упоминались, но не учитывались, т. е. области компактного проживания людей в архаических государствах фактически не рассматривались как замкнутые системы. Самым удивительным качеством обсуждаемой модели является ее популярность среди историков и экономистов [Капица, 1999; Коротаев и др., 2005].

Помимо спорности основных постулатов, предложенная Кремером модель равномерного гиперболического роста населения Земли также плохо согласуется с демографическими данными по отдельным странам. Население крупных суверенных государств, вплоть до начала XIX века опиравшихся в основном на собственные ресурсы, в историческом времени возрастало неравномерно. Надэкспоненциальный (т. е. гиперболический) рост происходил лишь в отдельные периоды длительностью 100–150 лет – например, в истории Англии такие периоды наблюдались в XV–XVII и XVIII–XIX вв. [Wrigley and Schofield, 2009] – и в докапиталистическую эпоху не сопровождался адекватным ему техническим прогрессом (рис. 4). Периоды быстрого роста, как правило, совпадали с объединением государств и усилением центральной власти при доступности ресурсов; далее они часто сменялись стагнацией либо регрессом после включения мальтузианских факторов («внутренняя колонизация» средневековой Европы с последующим перенаселением [Карпов, 2008]).

Наиболее правдоподобным объяснением как локального, так и общемирового гиперболического роста человечества в докапиталистическую эпоху представляется быстрое, в масштабах исторического времени, улучшение условий жизни людей в результате укрупнения политических субъектов, состоящих из областей компактного проживания населения, или «хозяйственных доменов». Объединение мелких враждующих княжеств и усиление центральной власти во всех регионах мира снижали уровень насилия, т. е. «социальную температуру» – в частности, благодаря прекращению междоусобных войн и уменьшению анархии на пограничных территориях. Централизация управления также повышала эффективность правительственных мер по борьбе с эпидемиями и голодом, что, безусловно, облегчало жизнь и экономическую деятельность в регионе.

Механизм физической конденсации хозяйственных доменов объясняет как общий гиперболический рост численности человечества, так и его замедление во 2-й половине XX века. Экономически выгодное укрупнение «областей порядка» в мире за последнее тысячелетие протекало в масштабах «медленного» исторического времени (несколько веков), сопровождаясь постепенным снижением уровня насилия и облегчением экономической деятельности – т. е. факторами, способствующими социальному и технологическому прогрессу. Результирующее улучшение условий жизни людей на каждом этапе объединения стимулировало более быстрые (несколько десятилетий) процессы роста населения; сама же конденсация хозяйственных доменов определяла демографическую динамику мира как ее лимитирующая стадия. Замедление темпов роста человечества, наблюдаемое в три последних десятилетия вместе с общим торможением технического и социального развития, коррелирует со стабилизацией большинства государственных границ и глобальным объединением экономик, отражая завершение основного этапа конденсации в мировой системе.

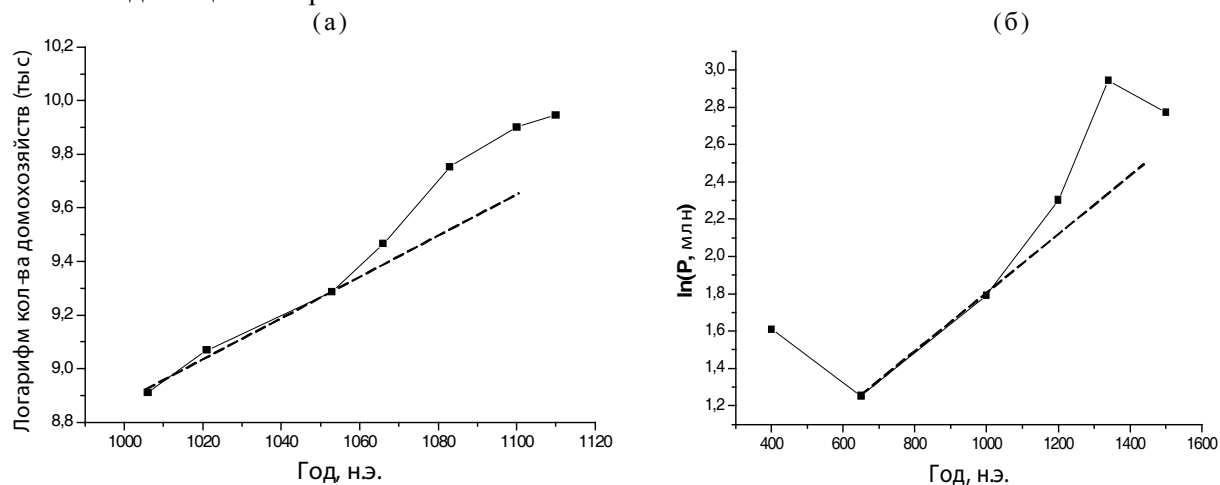


Рис. 4. Динамика изменения числа хозяйств в империи Сун с 1000 по 1110 гг. по данным переписей [Durand, 1960] и оценки численности населения на территории современных Нидерландов и Франции в средние века [Russel, 1987] в полулогарифмических координатах. Штриховые линии соответствуют экспоненциальному росту

Предлагаемый нами «конденсационный» механизм роста населения планеты основан лишь на естественном предположении об экономической выгоде («притяжении»), направляющей процесс конденсации. В его рамках нет необходимости постулировать свободный обмен информацией между регионами мира, политически и географически изолированными в докапиталистическую эпоху, и массовую изобретательскую деятельность в архаических государствах – т. е. вводить наименее правдоподобные допущения всех математических моделей, которыми обосновывают усредненно-гиперболический рост населения «Мир-Системы» [Капица, 1999; Коротаев и др., 2005]. Тот же механизм объясняет и противоположную динамику, т. е. «диссоциацию» хозяйственных доменов и снижение численности населения при повышении общего уровня насилия. Это, в частности, позволяет считать раннефеодальные периоды в истории Западной Европы (VI–X вв.) и послемонгольской Руси (XIII–XV вв.), рассматриваемые историками довольно оптимистически [Карпов, 2008], периодами длительного социально-экономического регресса, вызванного ростом политической раздробленности региона после внешних завоеваний.

## Мировые экономические кризисы

Экономическое состояние мира в последнее столетие также обнаруживает содержательные аналогии с физическими процессами. Динамика американского биржевого индекса Доу-

Джонса с начала XX века по настоящее время в полулогарифмических координатах имеет области линейного тренда, отвечавшие экспоненциальному росту экономики США (рис. 5). За периодом надэкспоненциального роста 1922–1929 гг. последовала Великая депрессия; аналогичные периоды 1993–2000 и 2003–2007 гг., предшествовали рецессии экономики США 2001–2002 гг. (купированной военными средствами) и началу нынешнего мирового экономического кризиса (2008 г.).

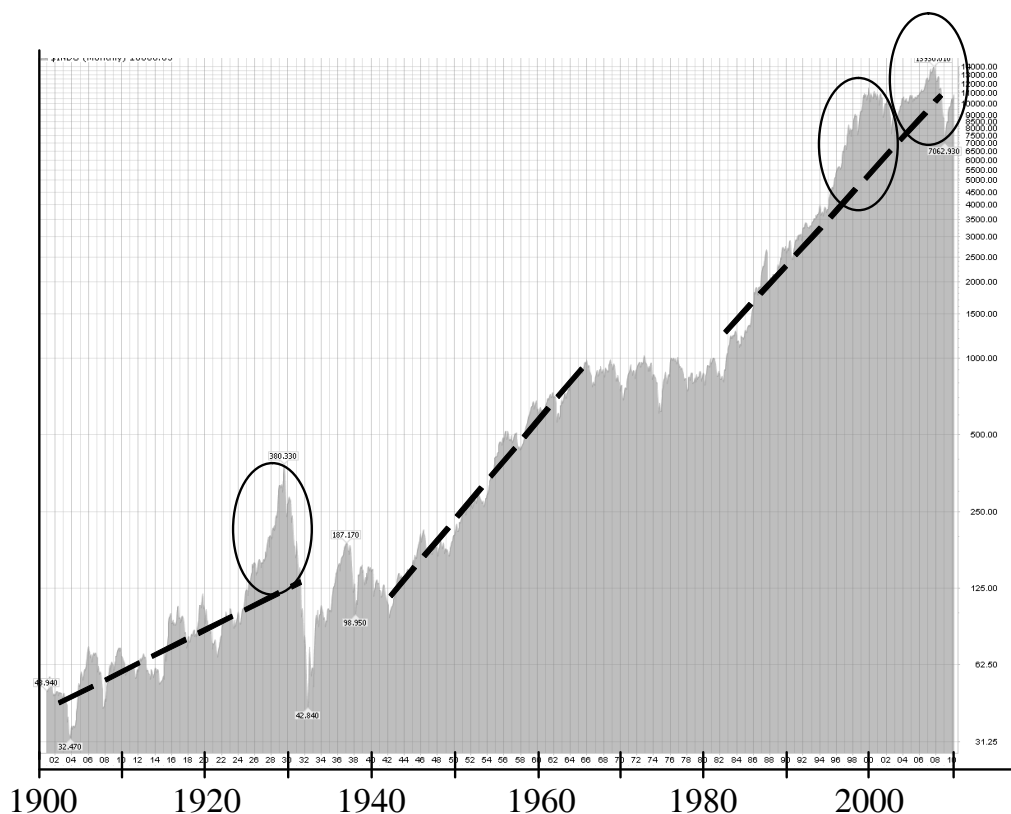


Рис. 5. Динамика Dow Jones Industrial Average в полулогарифмических координатах [<http://stockcharts.com/charts/historical/djia1900.html>]. Прямые линии: экспоненциальный рост; выделены участки надэкспоненциального роста в 1923–1929 и 1993–2007 гг.

Гиперболическая динамика биржевых индексов наблюдалась в периоды интенсивных слияний и поглощений (mergers and acquisitions, или M&A), т. е. спонтанной «конденсации капиталов» в американской и тесно связанной с ней мировой экономиках (рис. 6). Такая конденсация сопровождала экспансию американской экономики в Европу после 1918 г. и в бывшие соцстраны и третий мир после 1991 г. («расширение в пустоту») с параллельным ослаблением конкуренции («снижением экономической температуры», рис. 7). Глобальные волны неконтролируемых слияний и поглощений вызывали общемировую хозяйственную дезорганизацию из-за потери управляемости образующихся в них укрупненных транснациональных корпораций – весьма вероятного последствия быстрого роста фирмы [Penrose, 1995].

Третья волна конденсации капиталов, по-видимому, возникающая в настоящее время (рис. 8), может лишь усилить диспропорции мировой экономики и указывает на близость ее полномасштабного кризиса. Отметим, что динамика слияний и поглощений хорошо спрямляется в двойных логарифмических координатах при оценке размеров участвующих фирм рыночной стоимостью их акций, а такие препарированные характеристики как «справедливая цена акций» [Thomson Reuters 2005–2008] искажают наблюдаемый тренд. С физической точки зрения аналогом «потенциала притяжения» фирмы является именно ее рыночная стоимость, которой направляются действия биржевых агентов.

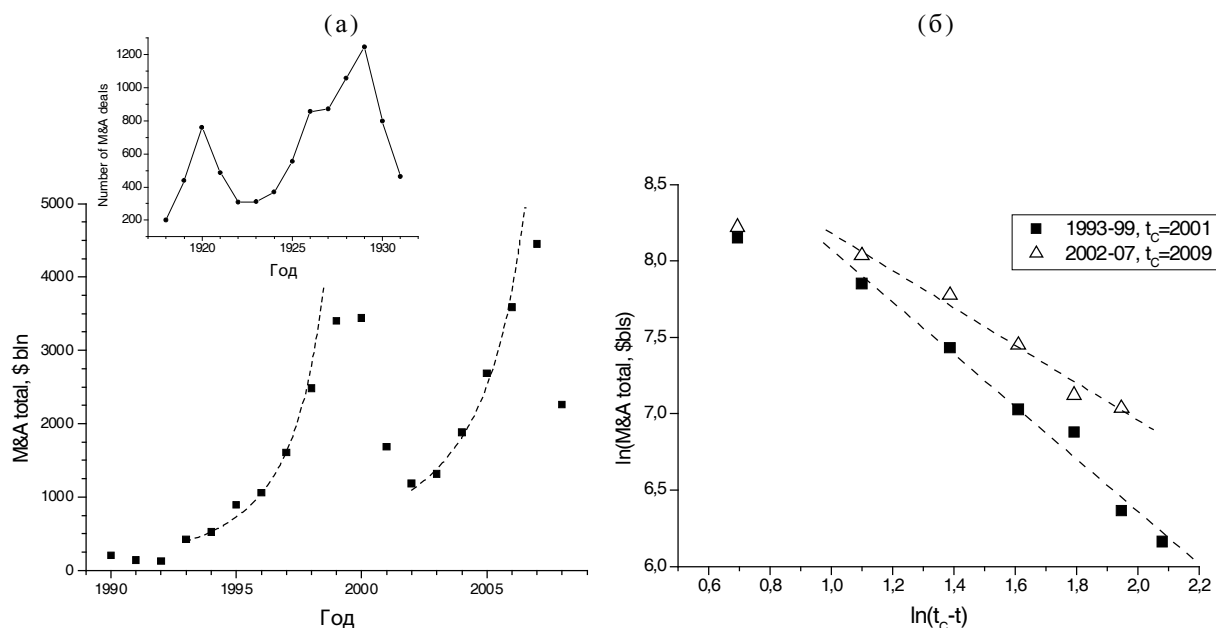


Рис. 6. (а) Годовые объемы крупных сделок по слиянию и поглощению (М&А) в США с 1990 по 2008 гг. [U.S. Census Bureau, 2009; Thomson Reuters 2005–2009], штриховые линии – гиперболы  $A(t_c - t)^{-\beta}$ . На врезке: количества крупных М&А в США с 1918 по 1931 гг. [Auerbach, 1988]. (б) Спрямление динамики М&А в двойных логарифмических координатах. Нижний график:  $\beta = 1,72(12)$ ,  $R = 0,9897$ ; верхний график:  $\beta = 1,25(10)$ ,  $R = 0,9908$

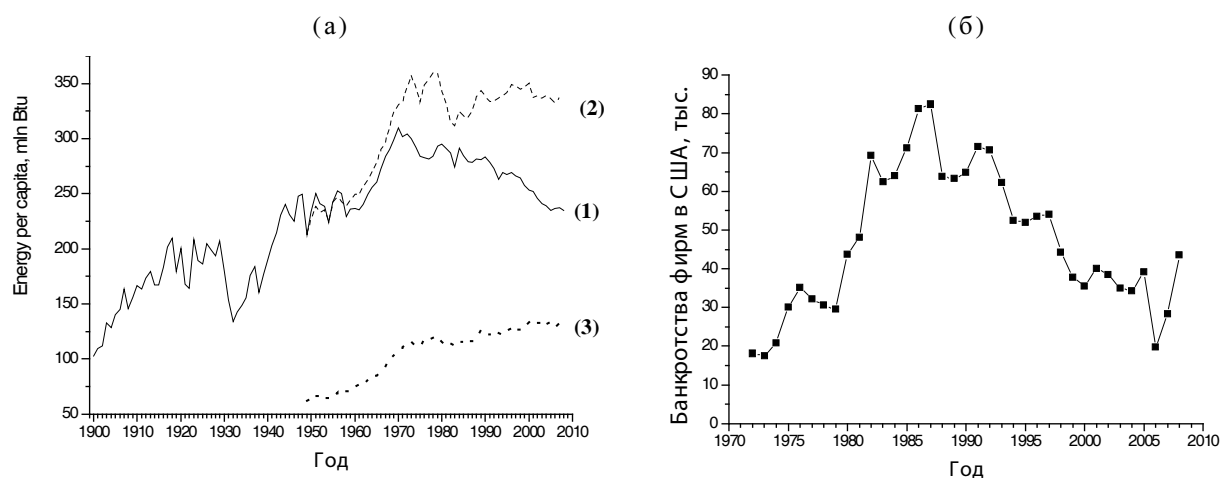


Рис. 7. (а) Снижение удельной энерговооруженности американской экономики с 1970-х гг.: (1) – производство энергии, (2) – потребление энергии, (3) – потребление энергии в строительстве и коммерции (на душу населения; 1 Btu = 1.055 кДж). (б) Ослабление конкуренции в экономике США с конца 1980-х гг.: годовое число банкротств американских фирм в 1972–2007 гг. [по U.S. Department of Energy, 2007 и U.S. Census Bureau, 2009]

## Заключение

Приведенные примеры иллюстрируют возможность физического описания некоторых существенных аспектов исторической и экономической динамики. Такое описание отнюдь не сводит историю и экономику к физике, однако оно позволяет выделить физические факторы, влияющие на протекание других, специфических процессов в сложных социальных системах. Нерешенными за-



дачами теории в «социальной физике» являются формализация элементарных взаимодействий агентов [Stanley et al., 2000] и установление их неклассической статистики [Tsalis, 2002].

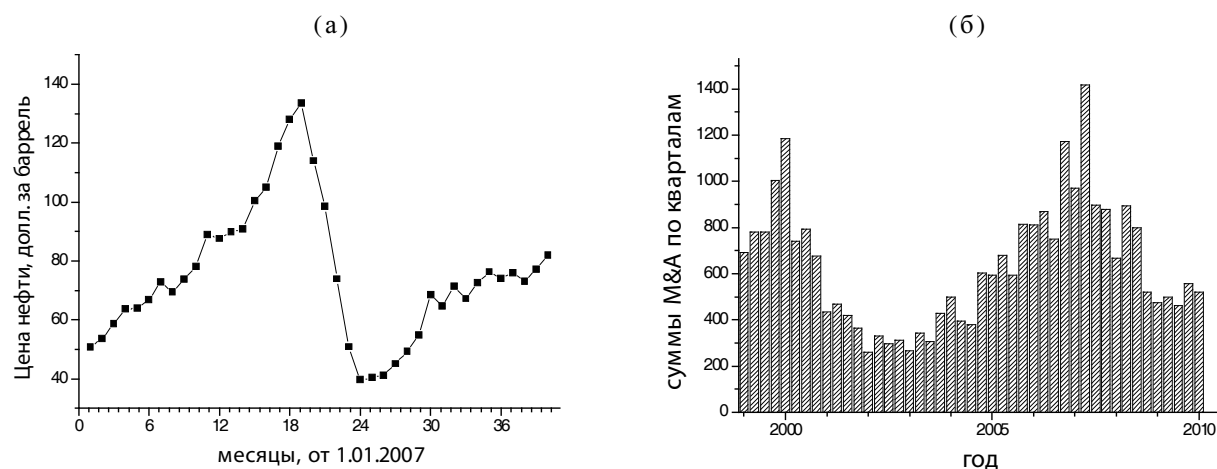


Рис. 8. (а) Среднемесячная цена нефтяной корзины ОПЕК в 2007–2010 гг. [<http://www.opec.org>], (б) суммы M&A по кварталам с 1999 по 2010 гг. (stock equity price, млрд долл) [Thomson Reuters]

Аналогия между социальными системами и «неживыми» многочастичными системами не может быть полной, поскольку число частиц в обычных макроскопических системах, хорошо описываемых методами статистической физики, сравнимо с числом Авогадро ( $6.02 \cdot 10^{23}$  молекул в грамм-моле вещества), на 14 порядков превышающим численность всего современного населения Земли ( $\sim 6.5 \cdot 10^9$  человек [United Nations, 2008]). «Разумная» (т. е. волевая) деятельность агентов в социальных ансамблях приводит к дополнительному повышению шума и к возникновению спонтанных корреляций («стадное поведение») [Stanley et al., 2000; Matassini and Franci, 2001]. Поэтому системы из  $N$  агентов, моделирующие социальные процессы, нельзя считать вполне макроскопическими: они скорее родственны наноразмерным атомным и молекулярным агрегатам, для которых характерны большие вариации интегральных параметров и сильное влияние краевых эффектов [Гусев, 2009]. Вместо одного равновесного либо стационарного состояния (постулируемого, например, в классических экономических теориях) в таких системах может возникать набор близких по устойчивости метастабильных состояний, задаваемых внешними параметрами [Чернавский и др., 2002], с возможностью перехода из одного состояния в другое под действием флуктуаций.

Таким образом, аналогии с фазовыми переходами лучше всего проявляются для крупных (глобальных) социальных систем, рассмотренных в настоящей работе, и нуждаются в уточнении и анализе в каждом конкретном случае. Для построения физически обоснованной теории следует также учитывать диссипативный характер процессов, протекающих в крупнейшей исторической системе «человечество на Земле», компонентами которой служат любые социальные системы, и подверженность этой системы действию геофизических и космических факторов (в частности, определяющих долговременные изменения климата планеты [Эдди, 1978]). Все это указывает на огромную область исследований, открытую перед новой физической дисциплиной, перспективы развития которой нами еще не вполне осознаны.

Автор глубоко признателен д. ф.-м. н. Г. Г. Малинецкому и д. ф.-м. н. Д. С. Чернавскому за стимулирующее обсуждение основных идей настоящей работы, а также к. ф.-м. н. С. А. Махову и д. э. н. А. Ю. Юданову, указавшим важные источники использованных в ней данных.

## Список литературы

- Auerbach A. J. (Ed.) *Mergers and Acquisitions*. Chicago: Univ. Chicago Press, 1988.
- Carlson H. G., Westrum E. F. Methanol: heat capacity, enthalpies of transition and melting, and thermodynamic properties from 5–300°K // *J. Chem. Phys.* 1971. Vol. 54. P. 1464–1471.
- Cremer M. Population growth and technological change: one million B.C. to 1990 // *Quart. J. Econ.* 1993. Vol. 108. P. 682–716.
- Durand J. D., The population statistics of China, AD 2–1953 // *Population Studies*. 1960. Vol. 13. P. 209–256.
- Fronczak P., Fronczak A., Holyst J.A. Ferromagnetic fluid as a model of social impact // *Internat. J. Modern Phys. C*. 2006. Vol. 17. P. 1227–1235.
- Matassini L., Franci F. On financial market trading // *Physica A* 289. 2001. Vol. 289. P. 526–532.
- Penrose E. The theory of the growth of the firm, 3<sup>rd</sup> Ed. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- Russel J. C. Medieval demography, in *AMS Studies in the Middle Ages*, №12, N. Y.: AMS Press., 1987.
- Stanley H. E., Gopikrishnan P., Plerou V., Amaral L. A. N. Quantifying fluctuations in economic systems by adapting methods of statistical physics // *Physica A*. 2000. Vol. 287. P. 339–361.
- Statistical Yearbook for Asia and the Pacific, 2009, United Nations, N. Y. 2010, и более ранние выпуски: <http://unyearbook.un.org/>.
- Thomson Reuters Financial Advisers, *Mergers and Acquisitions Reviews*, 2005–2008. <http://www.reuters.com>.
- Tsallis C. Entropic nonextensivity: a possible measure of complexity, *Chaos, Solitons and Fractals*. 2002. Vol. 13. P. 371–391.
- Tu Y. Phases and phase transitions in flocking systems // *Physica A*. 2000. Vol. 281. P. 30–37.
- U.S. Census Bureau, *Statistical Abstract of the United States, 2009 (128<sup>th</sup> Edition)*. Washington, DC, 2008, и более ранние выпуски, <http://www.census.gov/compendia/statab/>.
- United Nation Statistical Yearbook, Vol. 52 United Nations, N.Y. 2008 и более ранние выпуски: <http://unyearbook.un.org/>.
- Vicsek T. Crowd control // *Europhys. News*. 2003. Vol. 34. P. 45–51.
- Wrigley E. A., Schofield R. S. The population history of England, Cambridge, 2009.
- Гусев А. И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- Капица С. П. Общая теория роста человечества. М.: Наука, 1999.
- Карпов С. П. (ред.). История средних веков, 6-е изд., т. 1. М.: МГУ, 2008.
- Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А. Компактная математическая макро модель технико-экономического и демографического роста Мир-Системы, в кн. *История и синергетика: математическое моделирование социальной динамики*. М.: КомКнига, 2005. С. 6–48.
- Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики. М.: URSS, 2007.
- Мантенья Р. Н., Стенли Г. Ю. Введение в эконофизику. Корреляции и сложность в финансах (пер. с англ.). М.: URSS, 2009.
- Митюков Н. В. Имитационное моделирование в военной истории. М.: URSS, 2007.
- Романовский М. Ю., Романовский Ю. М., Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. М.: РХД Институт компьютерных исследований, 2007.
- Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления, пер. с англ. М.: Мир, 1973.
- Тагер А. А. Физико-химия полимеров, 4-е изд. М.: Научный мир, 2007.
- Чернавский Д. С., Старков Н. И., Щербаков А. В. О проблемах физической экономики // *Усп. физ. наук*. 2002. Т. 172. С. 339–361.
- Чернавский Д. С., Чернавская Н. М., Малков С. Ю., Малков А. С. Геополитические процессы как объект математического моделирования, в кн. *История и синергетика: математическое моделирование социальной динамики*. М.: КомКнига, 2005. С. 103–116.
- Эдди Дж. История об исчезнувших солнечных пятнах // *Усп. физ. наук*. 1978. Т. 125. С. 315–329.