

УДК: 519.633

Математическая модель сдвиговых течений в вене при наличии облитерирующего тромба

Е. А. Погорелова

Московский физико-технический институт (государственный университет),
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: pogorelova_lena@mail.ru

Получено 25 мая 2010 г.

Разработана численная модель распространения возмущений скорости тока крови и давления по кровеносному сосуду с тромбом, расположенным в точке венозной бифуркации, и их влияния на динамику тромба. Модель построена в акустическом (линейном) приближении. Результаты расчетов позволят определить условия возникновения резонансных колебаний тромба, которые могут привести к его отрыву и тромбоэмболии.

Ключевые слова: гемодинамика, неньютоновская жидкость, венозная бифуркация, тромб

Mathematical model of shear stress flows in the vein in the presence of obliterating thrombus

E. A. Pogorelova

Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskii per., Dolgoprudny, Moscow region, 141700, Russia

Abstract. – In this paper a numerical model for blood flow through a venous bifurcation with an obliterating clot is investigated. We studied propagation of perturbations of blood flow velocity and perturbations of pressure inside the vein. The model is built in acoustic (linear) approximation. Computational results reveal conditions for clot resonance oscillation, which can cause its detachment and thromboembolism.

Keywords: clot, hemodynamics, non-newtonian fluid, venous bifurcation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 169–182 (Russian).

Введение

Определение механических характеристик облитерирующих тромбов представляет интерес для медиков, но непосредственно измерить эти характеристики невозможно. В венозном дереве кровеносной системы формируются главным образом фибриновые тромбы, представляющие собой полимерные сети. Упругие свойства тромба зависят от свойств полимера фибрина. Часто тромбы формируются около искривлений, слияний и бифуркаций артерий и вен. Флотирующий тромб приводит к тромбоэмболии. Сорвавшийся тромб может закупорить сосуд, подходящий к жизненно важным органам. До отрыва тромба невозможно непосредственно определить его механические характеристики, определяющие срочность и метод лечения. С помощью УЗИ, доступного во многих медицинских учреждениях, частота и амплитуда колебаний тромба поддаются измерению. Следовательно, с помощью расчетов можно попытаться решить обратную задачу – определить, каким механическим характеристикам соответствует данный режим колебаний.

Изучение влияния стеноза артериальных сосудов на поток крови важно для решения ряда практических задач, прежде всего для прогноза жизнеугрожающих состояний за счет рисков развития инфарктов и инсультов; для клинического управления процессами развития атеросклероза, формирования подходов к его лечению и контролю терапевтической эффективности предпринятых консервативных и оперативных методов лечения.

Многие теоретические и экспериментальные работы посвящены исследованию потока крови сквозь стенозированные артерии. Для построения математических моделей прибегают к различным упрощениям. Ряд теоретических и экспериментальных работ посвящен сравнению реологических моделей крови. Форрест и Юнг экспериментально показали, что при течении крови в стенозированной артерии нельзя пренебрегать неньютоновскими эффектами [Forrest, Young, 1970]. Основной причиной неньютоновского поведения крови является общее снижение вязкости, вызванное дезагрегацией столбиков эритроцитов в плазме крови [Shibeshi, Collins, 2005]. Существует много моделей неньютоновской жидкости, описывающих кровь с различной степенью точности. Наиболее популярные – степенная жидкость, модели Кэссона и Carreau. В [Shibeshi, Collins, 2005; Chan, Ding, Tu, 2007] проведено сравнение этих моделей между собой и с моделью ньютоновской жидкости. В [Fan et al, 2009] сравниваются модели Кэссона, ньютоновской и гибридной жидкостей. Также встречаются работы, представляющие кровь моделью ньютоновской жидкости, например [Halдар, 1987; Ponalagusamy, 2007; Ortiz et al, 2006].

Более точно представляет кровь двухжидкостная модель: выделяется ядро течения (сuspension из эритроцитов), описываемое неньютоновской жидкостью, и пограничный слой (плазма крови), описываемый жидкостью Ньютона. В [Sankar, Ismail, 2009] неньютоновская жидкость в ядре течения представлена моделью Гершеля–Балкли и моделью Кэссона. На основе полученных результатов сделан вывод, что для изучения потока крови сквозь стенозированные артерии более подходит двухжидкостная модель Кэссона, чем модель Гершеля–Балкли. Аналогичная двухжидкостная модель использована в [Joshi, Pathak, Joshi, 2009].

Одно из частых упрощений – пренебрежение пульсовыми волнами, что соответствует венозному дереву.

Одна из характерных геометрических постановок задачи – поток крови в артериальной или венозной бифуркации. В [Shibeshi, Collins, 2005] исследован с помощью метода конечных элементов стационарный ламинарный поток в Т-образной бифуркации. На основе распределения скорости показано, что модель ньютоновской жидкости динамически близка к модели Кэссона, а степенная жидкость схожа с моделью Carreau. В [Banks, Bressloff, 2007] рассматривается турбулентный поток в трехмерной бифуркации. Модель бифуркации задана параметрически, что облегчает изменение локальной формы, сохраняя глобальную форму неизменной. В [Shaw et al, 2009] рассматривается стенозированная бифуркация артерии с подвижными стенками, артерии представлены прямыми цилиндрами конечной длины.

Безусловно, результаты моделирования могут быть использованы в экспериментальной медицине и клинической практике.

Постановка задачи

Рассматривается случай, когда тромб локализован вблизи венозной бифуркации. Будем строить математическую модель для случая, когда сформировавшийся фибриновый тромб полностью перекрывает просвет кровеносного сосуда. Из экспериментов известно, что фибриновые тромбы являются частично проницаемыми для жидкости [Николаев, Синауридзе, Буравцев, 2009]. В рамках принятой модели для построения общего описания тромба и крови будем считать, что и кровь, и тромб описываются моделью псевдопластической жидкости. Кровь хорошо описывается моделью Кэссона [Климов, Петров, Георгиевский, 2005], но для описания крови в данной работе используется модель Шведова–Бингама. Такая модель жидкости описывает интересный предельный случай псевдопластического течения: при напряжении сдвига превышающие порог текучести среда течет как обычная ньютоновская жидкость [Каро и др., 1981].

Физическая модель

Математическая модель, учитывающая все факторы, является слишком сложной для детального исследования. В рамках такой детальной модели необходимо учитывать, что кровь имеет сложную реологию, а область течения меняется со временем. Тип используемых уравнений также должен меняться в зависимости от того, описывается ли течение внутри тромба, где для медленных фильтрационных течений справедлив эмпирический закон Дарси [Николаев, Синауридзе, Буравцев, 2009], или сравнительно быстрые вязкопластичные течения крови. Кроме того, фибриновый тромб может быть не только частично проницаем для потока, но и сам двигаться в потоке жидкости. К тому же, есть основания считать сам тромб вязкоупругим. Таким образом, возникает соблазн единого описания тромба и крови в рамках единых математических моделей.

Для качественного исследования свойств моделей рассмотрим упрощенную постановку задачи. Течение крови считается осесимметричным. Поток крови из бокового сосуда впадает в основной сосуд ниже по течению, чем перекрывающий сосуд тромб. Геометрия рассматриваемой задачи показана на рис. 1, стрелкой обозначено направление скорости u_0 входного потока.

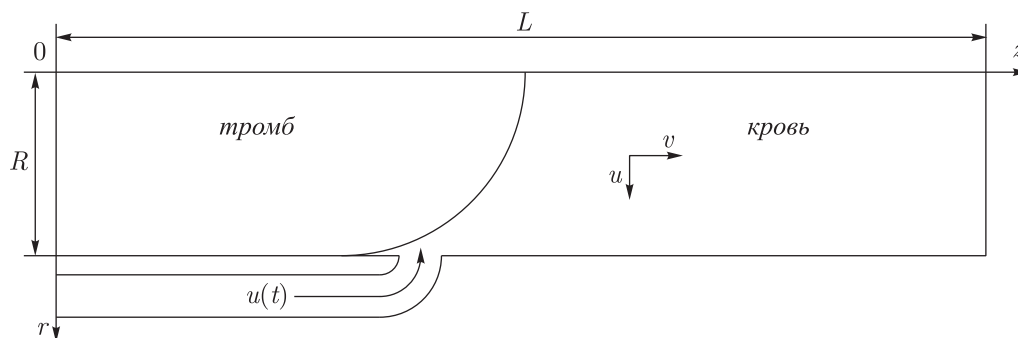


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи

Рассматривается участок сосуда длины L и радиуса R . Предполагается, что тромб занимает примерно половину расчетной области. В модельной постановке задачи форма границы тромба и крови считается полусферической (см. ниже).

Для качественного исследования задачи сделаем еще одно упрощение. Пусть расход жидкости через впадающий сосуд меньше, чем расход фильтрационного течения в тромбе. Течение в основном сосуде – стационарное, что соответствует венозной системе. Как известно, в мелких и средних венах влияние пульсовых волн незначительно [Каро и др., 1981].

Математическая модель невозмущенного течения крови по сосуду

Рассмотрим стационарное течение крови по цилиндрическому сосуду с жесткими неподвижными стенками и найдем профиль скорости v .

Уравнения движения однородной несжимаемой вязкопластической среды (для вектора скорости \mathbf{v} , давления P и шести компонент s_{ij} тензора напряжений \mathbf{S}):

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\text{grad } P + \text{Div } \mathbf{S}, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \\ s_{ij} &= 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) v_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad U > 0, \\ T &= \tau_s + \mu U, \quad U > 0, \\ T &\leq \tau_s, \quad U = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где v_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, $U = \sqrt{2v_{ij}v_{ij}}$ – второй инвариант тензора скоростей деформаций, T – второй инвариант тензора напряжений.

Перепишем систему (1) в цилиндрических координатах для осесимметричного течения:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial z} + \frac{2s_{rr} + s_{zz}}{r}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1'}$$

После преобразований система (1') принимает вид

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial s_{rz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{s_{rz}}{r}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \\ s_{rz} &= \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \frac{\partial v_z}{\partial r} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_s \text{sign} \frac{\partial v_z}{\partial r},\end{aligned}\tag{2}$$

где $U = \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|$ и $r > 0$.

При ненулевом значении напряжения сдвига в центральной части трубы жидкость образует ядро течения – движется как твердый стержень радиуса r_{core} со скоростью v_{max} [Лойцянский, 2003]. Скорость достигает максимального значения в ядре течения.

Найдем профиль скорости $v_z(r)$ в пограничном слое (при $r_{\text{core}} < r < R$). Введем обозначение для градиента давления $A = \frac{\partial P}{\partial z}$. В стационарном случае $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$ и второе уравнение системы (2) принимает вид $\frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{s_{rz}}{r} = A$. Его решение $s_{rz} = \frac{C}{r} + \frac{1}{2}Ar$. Т. к. на оси симметрии s_{rz} имеет конечное значение, то константа интегрирования $C = 0$. После подстановки выражения

для s_{rz} получим уравнение для v_z :

$$\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_s \operatorname{sign} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2} Ar \text{ при } r > r_{\text{core}}. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет решение $v_z = \frac{1}{\mu} \left(\frac{Ar^2}{4} + \tau_s r + D \right)$ при $\frac{\partial v_z}{\partial r} \leq 0$, где D — константа интегрирования. Из граничного условия $v_z|_{r=R} = 0$ находим $D = -\frac{AR^2}{4} - \tau_s R$, и решение уравнения (3) записывается в виде

$$v_z(r) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{A}{4} (r^2 - R^2) + \tau_s (r - R) \right) \text{ при } r > r_{\text{core}}. \quad (4)$$

Считаем, что на границе ядра течения $\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$, и из (4) находим радиус ядра течения $r_{\text{core}} = \frac{-2\tau_s}{A}$. Подстановкой r_{core} в формулу (4) для скорости находим скорость в ядре течения $v_{\text{max}} = v_z(r_{\text{core}})$.

$$v_{\text{max}} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{A}{4} (r_{\text{core}}^2 - R^2) + \tau_s (r_{\text{core}} - R) \right) \text{ при } r \leq r_{\text{core}}.$$

При $r_{\text{core}} = R$ ядро занимает весь объем сосуда и происходит заклинивание течения: жидкость не движется при напряжении сдвига, не превосходящем предельного значения $\tau_0 = \frac{-AR}{2}$.

Внутри фибрин-полимерной сети движение жидкости фильтрационное и описывается законом Дарси

$$\mathbf{W} = -\frac{k}{\eta} \nabla P,$$

где \mathbf{W} — скорость фильтрации, k — коэффициент проницаемости, η — динамическая вязкость. Таким образом, течение жидкости внутри тромба стационарное при постоянном перепаде давления.

Линеаризованная система уравнений

Далее учтем входной поток из бокового сосуда. Скорость входного потока изменяется во времени. Представим скорость течения в виде суммы скорости стационарного течения и малых возмущений u (проекция на ось r) и v (проекция на ось z): $\mathbf{v} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. К давлению P добавляется

возмущение \tilde{P} . Задача заключается в определении полей скоростей и давления.

В системе уравнений движения (1') добавим возмущения скорости и давления (заменяем величины v_r, v_z, P, U, s_{ij} на $v_r + u, v_z + v, P + \tilde{P}, U + \tilde{U}, s_{ij} + \tilde{s}_{ij}$ соответственно). Тогда (1') принимает вид:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + (v_z + v) \frac{\partial u}{\partial z} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial(P + \tilde{P})}{\partial r} + \frac{\partial(s_{rr} + \tilde{s}_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial(s_{rz} + \tilde{s}_{rz})}{\partial z} + \frac{2(s_{rr} + \tilde{s}_{rr}) + s_{zz} + \tilde{s}_{zz}}{r}, \\
&\quad \rho \left(\frac{\partial(v_z + v)}{\partial t} + u \frac{\partial(v_z + v)}{\partial r} + (v_z + v) \frac{\partial(v_z + v)}{\partial z} \right) = \\
&= -\frac{\partial(P + \tilde{P})}{\partial z} + \frac{\partial(s_{rz} + \tilde{s}_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial(s_{zz} + \tilde{s}_{zz})}{\partial z} + \frac{s_{rz} + \tilde{s}_{rz}}{r}, \\
&\quad \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(v_z + v)}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
s_{rr} + \tilde{s}_{rr} = \tilde{s}_{rr} &= 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U + \tilde{U}} \right) \frac{\partial u}{\partial r}, \quad s_{rz} + \tilde{s}_{rz} = \left(\mu + \frac{\tau_s}{U + \tilde{U}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial(v_z + v)}{\partial r} \right), \\
s_{zz} + \tilde{s}_{zz} = \tilde{s}_{zz} &= 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U + \tilde{U}} \right) \frac{\partial(v_z + v)}{\partial z} = 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U + \tilde{U}} \right) \frac{\partial v}{\partial z}, \\
U + \tilde{U} &= \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial(v_z + v)}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial(v_z + v)}{\partial r} \right)^2}.
\end{aligned}$$

Линеаризуем полученную систему на решение стационарной задачи. Учтем, что $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$. Преобразуем выражения для U и компонент девиатора тензора напряжений s_{ij} . Решение системы уравнений движения в невозмущенном случае существует только при $\frac{\partial v_z}{\partial r} < 0$. Тогда $U = -\frac{\partial v_z}{\partial r}$ и $\tilde{U} = -\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)$.

После подстановки выражений для s_{ij} и U в систему (5) и преобразований получим окончательный вид системы уравнений движения для нестационарного течения

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) - \frac{2u}{r^2} \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right), \\
\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\
\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Постановка начальных и граничных условий

В начальный момент времени на границе двух сосудов возмущения скорости равны скорости течения в боковом сосуде: $u = u_0(z, t)$, $v = 0$. Во всей остальной расчетной области $u = 0$, $v = 0$. В начальный момент возмущение давления $\tilde{P} = 0$. Граничные условия для скорости:

- на оси течения: $u = 0$, $\frac{\partial v}{\partial r} = 0$ (в силу симметрии),
- на стенке сосуда: $u = 0$, $v = 0$ (условия прилипания),
- на входном сечении: $u = 0$, $v = 0$ (считаем, что возмущения не распространяются далеко вверх по потоку),

- на выходе сосуда: $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ (свободное граничное условие).

Граничные условия для давления:

- на оси течения и на стенке сосуда: $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} = 0$ – условия отсутствия потока через стенку сосуда и условия симметрии на оси,
- на входном сечении: $\tilde{P} = 0$,
- на выходном сечении $\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} = 0$ (свободное граничное условие).

Определение формы границы тромба

Выведем уравнение для радиально симметричной границы тромба, на которой имеется скачок давления P . Для определения формы границы тромба рассмотрим соосные цилиндры радиуса $r \in [0, R]$, верхние основания которых касаются границы тромба, а нижние лежат в плоскости $z = 0$ (см. рис. 2). На цилиндр действует сила давления PS ($S = \pi r^2$ – площадь основания цилиндра) и ее компенсируют силы натяжения со стороны тромба. На малый элемент границы действует сила натяжения F , направленная под углом $\theta(r)$ к отрицательному направлению оси z ; следовательно, полная сила натяжения $2\pi r F \cos \theta(r)$.

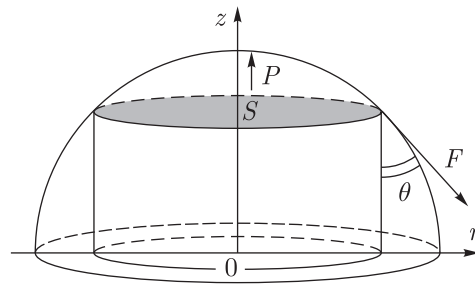


Рис. 2. Граница тромба $z(r)$

Запишем второй закон Ньютона для сил, действующих на рассматриваемый цилиндр:

$$PS - 2\pi r F \cos \theta(r) = 0. \quad (7)$$

Из (7) $\cos \theta(r) = \frac{PS}{2\pi r F} = \frac{Pr}{2F}$, но $\cos \theta(r) = \frac{dz}{\sqrt{(dz)^2 + (dr)^2}}$. Из условия прилипания $\cos \theta(R) = 1$ следует, что $\frac{4F^2}{P^2} = R^2$. Приравнявая выражения для $\cos \theta(R)$, получим $\cos^2 \theta(r) = \frac{(Pr)^2}{4F^2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{(dz)^2}{(dz)^2 + (dr)^2}$, откуда

$$dz = \pm \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr. \quad (8)$$

Учитывая граничное условие $z(R) = z_0$ (координата прикрепления тромба к стенке сосуда), из (8) найдем окончательное уравнение границы тромба:

$$z(r) = \sqrt{R^2 - r^2} + z_0. \quad (9)$$

Из (9) следует, что граница тромба имеет форму полусферы радиуса R .

Численный метод

Задача решается на неравномерной прямоугольной сетке $\omega = \omega_r \times \omega_z$, где $\omega_r = \left\{ r_i = \sqrt{\frac{i}{N_r}} R, i = 1, 2, \dots, N_r, h_{r,i} = r_{i+1} - r_i \right\}$ и $\omega_z = \left\{ z_j = j h_z, j = 1, 2, \dots, N_z, h_z = \frac{L}{N_z} \right\}$ (линии сетки сгущаются около стенок сосуда).

Величины u, v, v_z определены в узлах расчетной сетки, а \tilde{P}, μ, ρ и τ_s — в центрах ячеек расчетной сетки, их значения в узлах сетки вычисляются по формуле $\mu_{i,j} = 0,25 \times (\mu_{i+1/2,j+1/2} + \mu_{i+1/2,j-1/2} + \mu_{i-1/2,j+1/2} + \mu_{i-1/2,j-1/2})$ (для \tilde{P}, ρ и τ_s аналогично). Величины v_z и U определены и в узлах сетки и в серединах граней ячеек $(i + 1/2, j)$.

Для численного решения системы уравнений движения используется метод расщепления по направлениям [Федоренко, 1994]. Аппроксимация первого уравнения (6) расщепляется на три следующих разностных уравнения:

$$\rho(u_\tau + v_z \Lambda_z u) = F + G, \quad (10)$$

$$\rho u_\tau = \frac{1}{r} \Lambda_{r1} \left(2r \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \Lambda_r u \right), \quad (11)$$

$$\rho u_\tau = \Lambda_{z3} (\mu (\Lambda_{z2} u + \Lambda_r v)). \quad (12)$$

Аналогично для второго уравнения (6):

$$\rho(v_\tau + v_z \Lambda_z v) = L + Q, \quad (13)$$

$$\rho v_\tau = \frac{1}{r} \Lambda_{r1} (r \mu (\Lambda_{z2} u + \Lambda_r v)), \quad (14)$$

$$\rho v_\tau = \Lambda_{z3} \left(2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \Lambda_{z2} v \right), \quad (15)$$

где $\Lambda_r y_{i+1/2,j} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{h_{r,i}}, \quad \Lambda_{r1} y_{i,j} = \frac{y_{i+1/2,j} - y_{i-1/2,j}}{0,5(h_{r,i} + h_{r,i-1})}, \quad \Lambda_{z1} y_{i,j} = \frac{(1+\alpha)y_{i,j+1} + (-1-2\alpha)y_{i,j} + \alpha y_{i,j-1}}{h_z},$

$\Lambda_{z2} y_{i,j+1/2} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{h_z}, \quad \Lambda_{z3} y_{i,j} = \frac{y_{i,j+1/2} - y_{i,j-1/2}}{h_z}$ — разностные операторы, $F = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r},$

$G = -\frac{2u}{r^2} \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right), \quad L = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}, \quad Q = -u \frac{\partial v_z}{\partial r}.$ Определим разности $f_{i,j+1/2} = -\Lambda_r \tilde{P}_{i,j},$

$l_{i,j} = \frac{-\Lambda_z \tilde{P}_{i,j+1} - \Lambda_z \tilde{P}_{i,j}}{2}$ и функции $q_{i,j} = -u_{i,j} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_i, \quad g_{i,j} = -\frac{2u_{i,j}}{r_i^2} \left(\mu_{i,j} + \frac{\tau_{s,i,j}}{U_i} \right).$ Функции $F, G, L,$

Q вычислим по трем точкам так, чтобы разностные уравнения имели второй порядок аппроксимации по пространству:

$$F_{i,j} = \left(\frac{23}{24} + \alpha \right) f_{i,j+1/2} + \left(\frac{1}{12} - \alpha \right) f_{i,j-1/2} - \frac{1}{24} f_{i,j-3/2},$$

$$G_{i,j} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \alpha \right) g_{i,j+1} + \frac{5}{6} g_{i,j} + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \alpha \right) g_{i,j-1},$$

для вычисления функции L и Q значения $l_{i,j}$ $q_{i,j}$ берутся с теми же весами, что $g_{i,j}$ для функции G .

Целесообразно использовать разности против потока, поэтому принимается значение $\alpha = -1$. Введем обозначение для кажущейся вязкости $a = \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right)$.

Разностные операторы, аппроксимирующие производные второго порядка в системе (10–12), определим следующим образом:

$$\Lambda_{r1} \left(2r \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \Lambda_r u \right) = \frac{2}{h_{r,i} + h_{r,i-1}} \left(2r_{i+1/2} a_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{r,i}} - 2r_{i-1/2} a_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_{r,i-1}} \right),$$

$$\text{где } a_{i+1/2,j} = \left(0,5(\mu_{i+1/2,j+1/2} + \mu_{i+1/2,j-1/2}) + \frac{0,5(\tau_{s,i+1/2,j+1/2} + \tau_{s,i+1/2,j-1/2})}{U_{i+1/2}} \right);$$

$$\Lambda_{z3} (\mu (\Lambda_{z2} u + \Lambda_r v)) = \Lambda_{z3} (\mu \Lambda_{z2} u) + \Lambda_{z3} (\mu \Lambda_r v),$$

$$\text{где } \Lambda_{z3} (\mu \Lambda_{z2} u) = \frac{1}{h_z} \left(\mu_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_z} - \mu_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_z} \right),$$

$$\Lambda_{z3} (\mu \Lambda_r v) = \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2} (v_{i+1,j+1} - v_{i,j+1} + v_{i+1,j} - v_{i,j}) - \mu_{i+1/2,j-1/2} (v_{i+1,j} - v_{i,j} + v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1})}{4h_z h_{r,i}} +$$

$$+ \frac{\mu_{i-1/2,j+1/2} (v_{i,j+1} - v_{i-1,j+1} + v_{i,j} - v_{i-1,j}) - \mu_{i-1/2,j-1/2} (v_{i,j} - v_{i-1,j} + v_{i,j-1} - v_{i-1,j-1})}{4h_z h_{r,i-1}}.$$

Разностные операторы, аппроксимирующие производные второго порядка в системе (13–15), определим следующим образом:

$$\Lambda_{r1} (r\mu (\Lambda_{z2} u + \Lambda_r v)) = \Lambda_{r1} (r\mu \Lambda_{z2} u) + \Lambda_{r1} (r\mu \Lambda_r v),$$

где

$$\Lambda_{r1} (r\mu \Lambda_{z2} u) = \frac{1}{(h_{r,i} + h_{r,i-1})2h_z} \times$$

$$\times \left(\mu_{i+1/2,j+1/2} r_{i+1/2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \mu_{i-1/2,j+1/2} r_{i-1/2} (u_{i,j+1} - u_{i,j} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}) + \right.$$

$$\left. + \mu_{i+1/2,j-1/2} r_{i+1/2} (u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j} - u_{i,j-1}) - \mu_{i-1/2,j-1/2} r_{i-1/2} (u_{i,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}) \right),$$

$$\Lambda_{r1} (r\mu \Lambda_r v) = \frac{2}{(h_{r,i} + h_{r,i-1})} \left(\mu_{i+1/2,j} r_{i+1/2} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{r,i}} - \mu_{i-1/2,j} r_{i-1/2} \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_{r,i-1}} \right);$$

$$\Lambda_{z3} \left(2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \Lambda_{z2} v \right) = \frac{1}{h_z} \left(2a_{i,j+1/2} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_z} - 2a_{i,j-1/2} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_z} \right),$$

$$\text{где } a_{i,j+1/2} = \left(0,5(\mu_{i+1/2,j+1/2} + \mu_{i-1/2,j+1/2}) + \frac{0,5(\tau_{s,i+1/2,j+1/2} + \tau_{s,i-1/2,j+1/2})}{U_i} \right).$$

Для определения поля давлений совместно с решением уравнения неразрывности введем итерационную процедуру

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + v_z \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} \right) = \tau^n \Delta \tilde{P} - \operatorname{div} u, \quad (16)$$

где $\Delta\tilde{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2}$, τ^n – итерационный параметр, $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t}$ – производная возмущения давления по времени, ее численный аналог $\frac{\tilde{P}_{i,j}^{(l+1)} - \tilde{P}_{i,j}^{(l)}}{\tau_p}$, τ_p – релаксационный параметр, l – номер итерации.

Уравнение (16) решаем методом шахматного (красно-черного) упорядочения [Деммель, 2001].

Получена разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений движения со вторым порядком аппроксимации по пространству. Так как все переменные системы уравнений связаны через давление, то для численного нахождения поля давления применяется метод простой итерации. Алгоритм решения:

- Задаем начальные приближения полей давления и скорости.
- Предиктор 1. В первом приближении полагаем давление на данном $n + 1$ шаге по времени равным давлению на предыдущем n шаге по времени.
- Предиктор 2. Решаем систему уравнений (10–15) относительно компонент скорости u и v .
- Корректор 1. Уравнение (16) для давления \tilde{P} решается на установление.
- Корректор 2. По найденному полю давления пересчитываем значения компонент скорости.

Предварительные результаты гидродинамического расчета

В этом разделе показаны результаты расчета пульсирующего потока из бокового сосуда. Рассматривается сосуд радиуса $R=1$ и длины $L=10$, боковой сосуд присоединяется в точках с координатами $r=R=1$ и $z_1 < z < z_2$, где $z_1=5$, $z_2=5.5$. Скорость стационарного потока в ядре течения $V_{\max}=0.1$. Профиль скорости в боковом сосуде параболический: $u_0(z,t) = 4u_{0,\max}(t)(z-z_1)(z-z_2)/(z_2-z_1)^2$, где $z_1 < z < z_2$. Максимальная скорость в боковом сосуде изменяется по гармоническому закону: $u_{0,\max}(t) = u_A(1 - \cos \pi t)$. На рис. 3–5 показаны линии тока, поле полной скорости и поле возмущений давления \tilde{P} в момент времени $t=0.25$ с, когда поток из бокового сосуда начинает увеличиваться. На рис. 6–8 показаны те же данные в момент времени $t=1$ с, когда поток из бокового сосуда максимален. На рис. 3, 4, 6, 7 горизонтальная ось соответствует оси z (оси симметрии сосуда), а вертикальная – оси r .

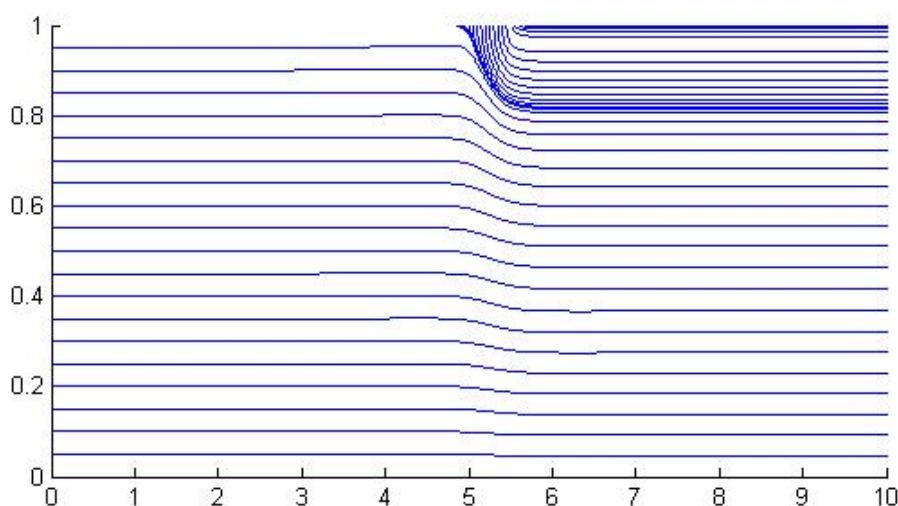


Рис. 3. Линии тока при $t = 0,25$ с. Амплитуда $u_A = 0,05$

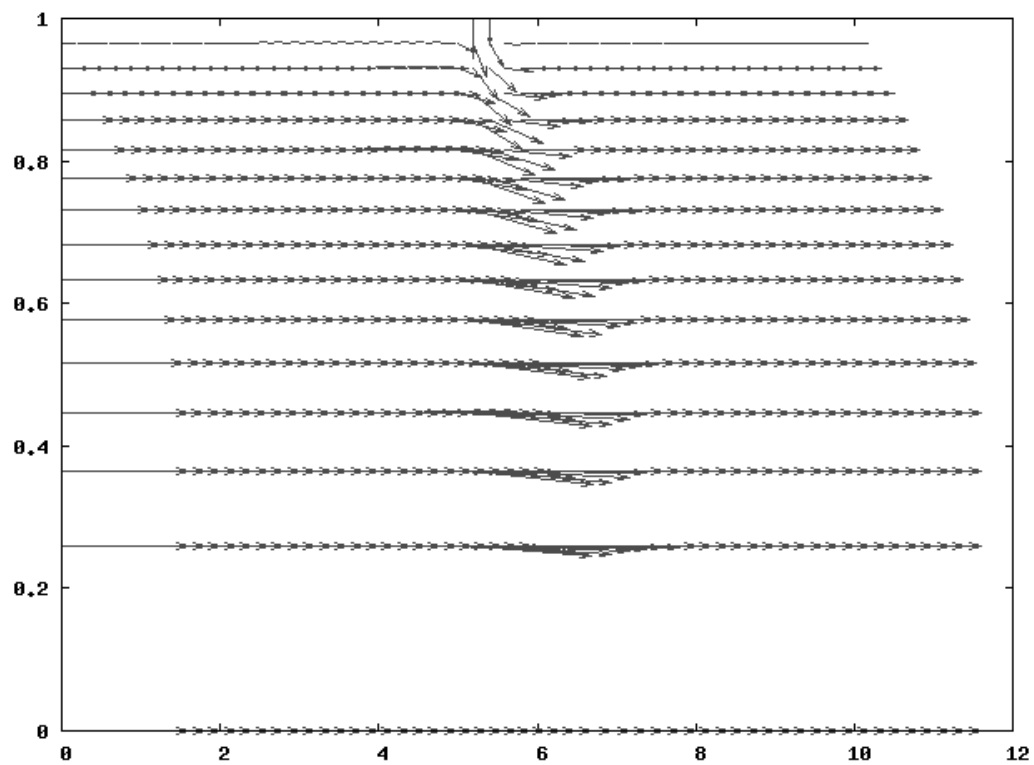


Рис. 4. Поле полной скорости при $t = 0.25$ с. Амплитуда $u_A = 0.05$

Видно, что поток из бокового сосуда поворачивает направо под действием основного потока. На основе сравнения рис. 3 и рис. 6 можно сделать вывод, что тромб совершает колебательные движения.

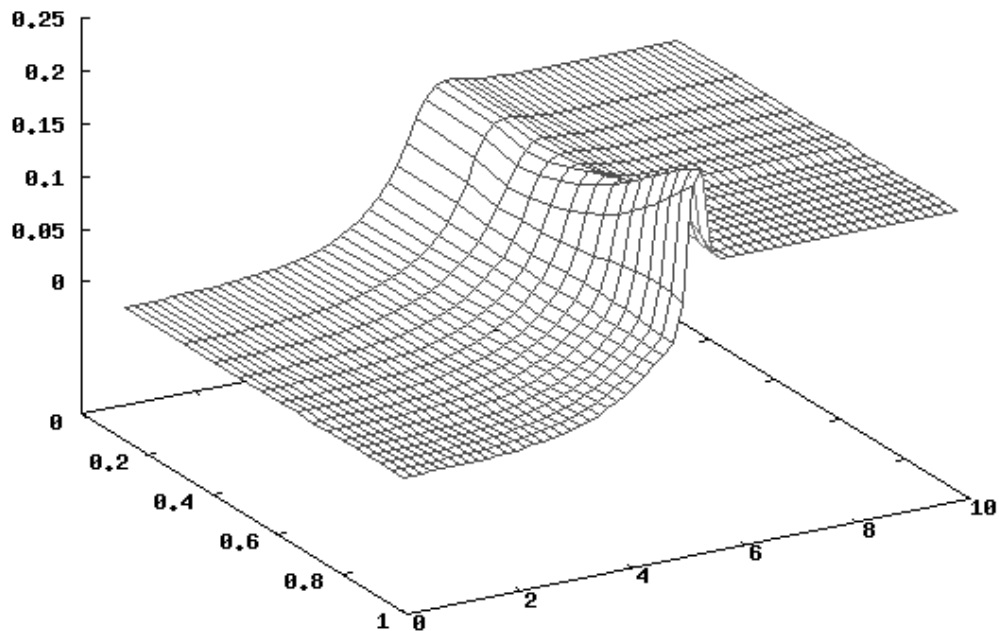


Рис. 5. Давление при $t = 0.25$ с. Амплитуда $u_A = 0.05$

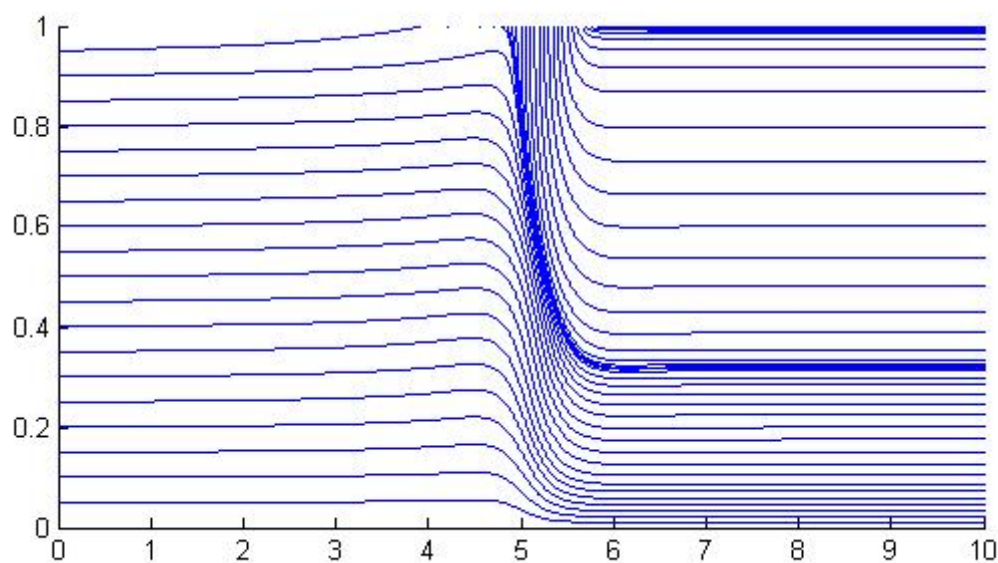


Рис. 6. Линии тока при $t = 1$ с. Амплитуда $u_A = 0.05$

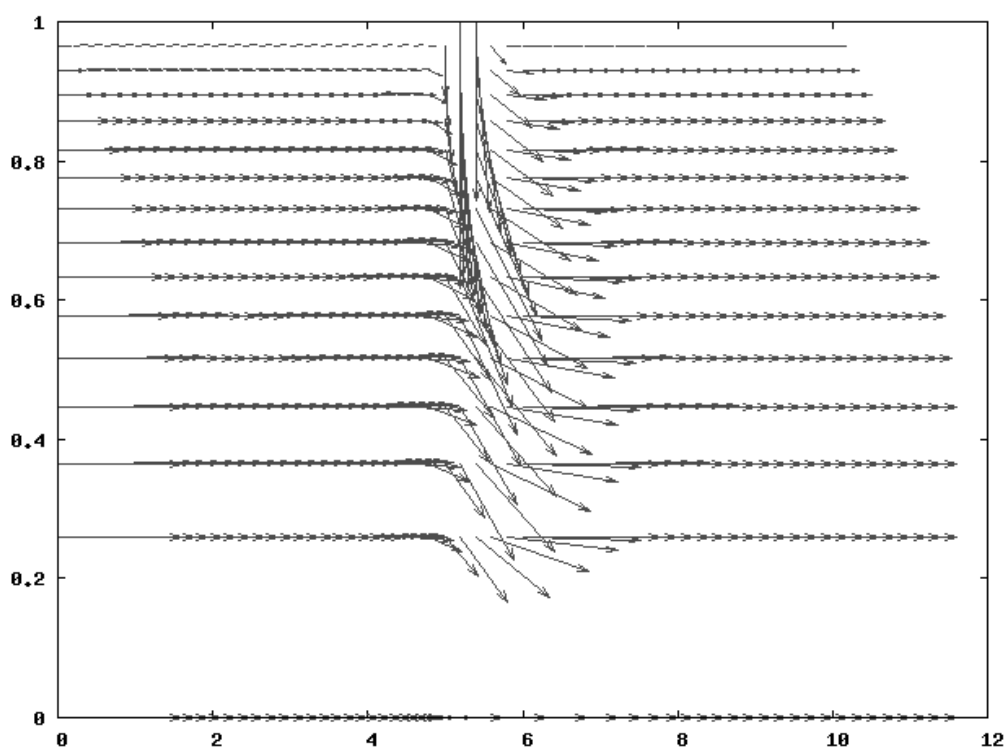


Рис. 7. Поле скоростей при $t = 1$ с. Амплитуда $u_A = 0.05$

Заключение

В работе разработана математическая модель течения крови в окрестности венозной бифуркации с облитерирующим тромбом.

Решение уравнений модели напрямую является непростой задачей, но после применения метода расщепления по физическим процессам модель сводится к уравнениям переноса

и диффузии, которые достаточно хорошо решаются численно. Для численного решения системы был применен метод простой итерации.

Получена разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений движения со вторым порядком аппроксимации по пространству, и предложен алгоритм ее численного решения. Приведены результаты расчетов полей скоростей и давления для случая с пульсирующим потоком из бокового сосуда.

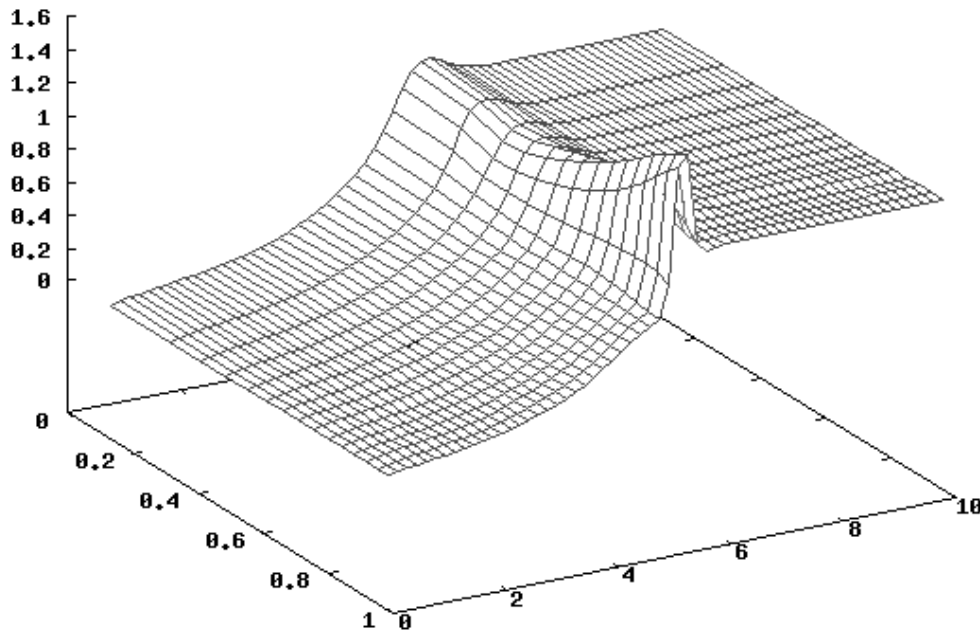


Рис. 8. Давление при $t = 1$ с. Амплитуда $u_A = 0,05$

В дальнейшем, применяя предложенную модель, планируется определить устойчивость колебаний тромба. Таким образом, по данным УЗИ и модельных расчетов можно установить, требуется ли больному тромбозом срочная операция из-за угрозы скорой тромбоэмболии или можно ликвидировать тромб химическим путем, зная, что он в ближайшее время не оторвется.

Автор выражает благодарность и признательность научному руководителю д. ф.-м. н, профессору А. И. Лобанову.

Список литературы

- Banks J., Bressloff N. W.* Turbulence Modelling in the Three-Dimensional Stenosed Arterial Bifurcations // Journal of Biomechanical Engineering. 2007. Vol. 129. P. 40–50.
- Chan W. Y., Ding Y., Tu J. U.* Modelling of non-Newtonian blood flow through a stenosed artery incorporating fluid-structure interaction // Australian & New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal. 2007. N 47. P. 507–523.
- Fan Y., Jiang W., Zou Y., Li J., Chen J., Deng X.* Numerical simulation of pulsatile non-Newtonian flow in the carotid artery bifurcation // Acta Mechanica Sinica. 2009. N 25. P. 249–255.
- Forrest J. H., Young D. F.* Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease // Journal of Biomechanics. 1970. N 3. P. 307–316.
- Haldar K.* Oscillatory flow of blood in a stenosed artery // Bulletin of Mathematical Biology. 1987. Vol. 49, N 3. P. 279–287.
- Joshi P., Pathak A., Joshi B. K.* Two-Layered Model of Blood Flow through Composite Stenosed Artery // Applications and Applied Mathematics: An International Journal. 2009. Vol. 4, N 2. P. 343–354.

- Ortiz J. P., de Bessa K. L., Legendre D. F., de Almeida Prado R.F.* Physiological Pulsatile Waveform through Axisymmetric stenosed Arteries: Numerical Simulation // ABCM Symposium Series in Bioengineering. 2006. Vol. 1.
- Ponalagusamy R.* Blood flow through an artery with mild stenosis: a two-layered model, different shapes of stenoses and slip velocity at the wall // Journal of Applied Sciences. 2007. № 7(7). P. 1071–1077.
- Sankar D. S., Ismail A. I. Md.* Two-Fluids Mathematical Models for Blood Flow in Stenosed Arteries: A Comparative Study // Boundary Value Problems. 2009.
- Shaw S., Gorla R. S. R., Murthy P. V. S. N., Ng C. O.* Pulsatile Casson Fluid Flow Through a Stenosed Bifurcated Artery // International Journal of Fluid Mechanics Research. 2009. Vol. 36, № 1. P. 43–63.
- Shibeshi S. S., Collins W. E.* The rheology of Blood Flow in a Branched Arterial System // Applied Rheology. 2005. N 15(6). P. 398–405.
- Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. 430 с.
- Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 607 с.
- Климов Д. М., Петров А. Г., Георгиевский Д. В.* Вязкопластические течения: динам. хаос, устойчивость, перемешивание / Ин-т проблем механики. М.: Наука, 2005. 394 с.
- Кутепов А. М. и др.* Химическая гидродинамика: Справочное пособие / А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов, А. В. Вязьмин, А. В. Вязьмин, Д. А. Казенин. М.: Бюро квантум, 1996. 336 с.
- Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- Николаев А. В., Синауридзе Е. И., Буравцев В. Н.* Экспериментальное исследование проницаемости фибринового сгустка в присутствии альбумина // Вестник Московского университета. 2009. Сер. 3 Физика, астрономия, № 03. С. 85–89.
- Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику: Учеб. пособие: Для вузов. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.