**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 Т. 2 № 2 С. 151–160**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.957; 517.968.74; 519.111.8

Система Эйнштейна–Эренфеста типа $(0, M)$ и асимптотические решения многомерного нелинейного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

Р. О. Резаев[1], А. Ю. Трифонов[1,2], А. В. Шаповалов[1,2,a]

[1]Томский политехнический университет, 634050, г. Томск, проспект Ленина, 30
[2]Томский государственный университет, 634050, г. Томск, проспект Ленина, 36

E-mail: [a] shpv@phys.tsu.ru

Получено 18 апреля 2010 г.

Рассмотрен формализм квазиклассического приближения относительно малого коэффициента диффузии D, $D \to 0$, для многомерного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с нелокальным и нелинейным вектором сноса в классе траекторно-сосредоточенных функций. Получена динамическая система Эйнштейна–Эренфеста типа $(0, M)$, описывающая движение точки, в окрестности которой локализованы квазиклассические асимптотические решения. Построено семейство квазиклассических асимптотик с точностью $O(D^{(M+1)/2})$.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, квазиклассические асимптотики, метод ВКБ Маслова, система Эйнштейна–Эренфеста

The Einstein–Ehrenfest system of $(0, M)$-type and asymptotical solutions of the multidimensional nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equation

R. O. Rezaev[1], A. Yu. Trifonov[1,2], A. V. Shapovalov[1,2]

[1]Tomsk Polytechnic University, Lenin av. 30, Tomsk, 634050, Russia
[2]Tomsk State University, Lenin av. 36, Tomsk, 634050, Russia

Abstract. – Semiclassical approximation formalism is developed for the multidimensional Fokker–Planck–Kolmogorov equation with non-local and nonlinear drift vector with respect to a small diffusion coefficient D, $D \to 0$, in the class of trajectory concentrated functions. The Einstein–Ehrenfest system of $(0, M)$ -type is obtained. A family of semiclassical solutions localized around a point driven by the Einstein–Ehrenfest system accurate to $O(D^{(M+1)/2})$ is found.

Keywords: nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equation, semiclassical asymptotics, WKB-Maslov method, Einstein–Ehrenfest system

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 151–160 (Russian).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП Министерства образования и науки РФ № 2.1.1/3436; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракты № 02.740.11.0238; П691; П789

Введение

Одним из способов описания динамики флуктуаций в нелинейных системах является функция плотности распределения вероятностей $u(\vec{x},t)$ случайной величины $\vec{x}$ $(\in \mathbb{R}^n)$ в момент времени t. Функция $u(\vec{x},t)$ определяется уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [Risken, 1989], в котором эффекты стохастической обратной связи учитываются соответствующими нелинейными слагаемыми в уравнении [Frank, 2005].

Точное интегрирование нелинейного уравнения ФПК в многомерном пространстве-времени представляет собой нетривиальную математическую проблему, решить которую удается лишь в исключительных частных случаях, имеющих ограниченные физические приложения. Более широкие возможности исследования нелинейных стохастических процессов аналитическими методами предоставляют асимптотические методы построения решений эволюционных уравнений с частными производными. Приближенные решения могут быть построены в специальных классах функций, содержащих асимптотический параметр.

Для уравнения ФПК с малым коэффициентом диффузии D асимптотические решения могут быть построены в классе функций, сингулярно зависящих от параметра D, на основе метода построения квазиклассических асимптотик ВКБ Маслова (см., например, [Маслов, Федорюк, 1976; Маслов, 1977; Белов, Доброхотов, 1988]). С физической точки зрения подобные решения описывают эволюцию «узких» начальных распределений, локализованных в окрестности точки, движущейся по траекториям динамической системы (системы Эйнштейна–Эренфеста) моментов функции $u(\vec{x},t)$ – решения уравнения ФПК. Для построения приближенных решений в классе функций, локализованных в окрестности точки (нульмерного многообразия), в системе Эйнштейна–Эренфеста (ЭЭ) учитываются моменты некоторого конечного порядка M. Такую систему ЭЭ отнесем к типу $(0,M)$.

Взаимосвязь между системой ЭЭ и уравнением ФПК аналогична взаимосвязи между квантовомеханическим (линейным) уравнением Шрёдингера и соответствующими ему уравнениями классической механики [Маслов, Федорюк, 1976; Ландау, Лифшиц, 1974]. В определении оператора нелинейного уравнения ФПК существенен как символ оператора, так и класс функций, на которые действует оператор. Оба атрибута оператора определяют вид динамической системы Эйнштейна–Эренфеста, что отличает построение «классической» системы ЭЭ для нелинейного уравнения ФПК от соответствующей задачи в квантовой механике, где вид классических уравнении движения зависит от символа оператора уравнения Шредингера. Отметим, что соответствующие асимптотические решения уравнения ФПК называются квазиклассическими асимптотиками [Маслов, Федорюк, 1976; Маслов, 1977; Белов, Доброхотов, 1988].

С помощью общего решения системы ЭЭ, содержащего постоянные интегрирования, из нелинейного уравнения ФПК выводится параметрическое семейство линейных уравнений ФПК, ассоциированных с исходным нелинейным уравнением. Из решений семейства ассоциированных линейных уравнений при специальном выборе параметров получаются квазиклассические асимптотики исходного нелинейного уравнения ФПК.

В работе получена в явном виде динамическая система ЭЭ для многомерного уравнения ФПК с постоянной матрицей диффузии и нелокальным нелинейным вектором сноса следующего вида:

$$D\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} = \left\langle \hat{\vec{\pi}}, T\hat{\vec{\pi}} \right\rangle u(\vec{x},t) + \left\langle \hat{\vec{\pi}}, [V_{\vec{x}}(\vec{x},t)u(\vec{x},t) + u(\vec{x},t)\int_{\mathbb{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}] \right\rangle. \quad (1)$$

Здесь $t\in\mathbb{R}^1$; $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ – независимые переменные; $(x_1,\dots,x_n)^\top$ означает транспонированный вектор или матрицу; угловые скобки $\langle\dots\rangle$ представляют евклидово скалярное произведение; $d\vec{x}=dx_1\dots dx_n$; $u(\vec{x},t)$ – вещественная гладкая убывающая при $\vec{x}\to\infty$ функция; T – некоторая постоянная матрица диффузии. Функции $V_{\vec{x}}(\vec{x},t)$, $W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)$, задающие вектор сноса в уравнении (1), являются бесконечно гладкими и растут при $|\vec{x}|,|\vec{y}|\to\infty$ не быстрее, чем полином;

$$V_{\vec{x}}(\vec{x},t)=\frac{\partial V(\vec{x},t)}{\partial\vec{x}},\quad W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)=\frac{\partial W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial\vec{x}},\quad \hat{\vec{\pi}}=D\frac{\partial}{\partial\vec{x}}, \tag{2}$$

D – малый асимптотический параметр.

Решения уравнения (1) ищутся в классе $\mathcal{P}_t^D$ функций $u(\vec{x},t)$, сингулярно зависящих от параметра D, следующего вида:

$$\mathcal{P}_t^{\mathrm{D}}=\left\{u(\vec{x},t)\middle|u(\vec{x},t)=\varphi\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{D}},t,D\right)\exp\left(\frac{1}{D}S(t,D)\right)\right\}. \tag{3}$$

Здесь вещественная функция $\varphi(\zeta,t,D)$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}$ по переменной $\zeta\in\mathbb{R}^n$, гладким образом зависит от t и регулярно по $\sqrt{D}$ при $D\to0$; $\Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{X}(t,D)$. Вещественные функции $\vec{X}(t,D)$ и $S(t,D)$ регулярно зависят от $\sqrt{D}$ в окрестности значения $D=0$ и гладко зависят от t. Функции $\vec{X}(t,D)$, $S(t,D)$ являются функциональными параметрами класса $\mathcal{P}_t^D$ и подлежат определению при построении решения уравнения (1). Функции класса (3) при $D\to0$ локализованы в окрестности точки, движущейся по кривой $\vec{X}(t,D)$, поэтому $\mathcal{P}_t^D$ естественно называть классом траекторно-сосредоточенных функций.
Для уравнения (1) с коэффициентами (2) в классе $\mathcal{P}_t^D$ построено семейство квазиклассических асимптотик с точностью $O(D^{(M+1)/2})$.

Система Эйнштейна–Эренфеста

Функции $u(\vec{x},t)$ вида (3) будем полагать нормируемыми в пространстве L_2. Прямой проверкой нетрудно проверить справедливость оценок

$$\frac{\left\|(\hat{\vec{\pi}})^k(\Delta\vec{x})^l u\right\|}{\|u\|}=O(D^{(k+l)/2}),\quad \frac{\left\|\left[D\partial_t+\langle\dot{\vec{X}},\hat{\vec{\pi}}\rangle-\dot{S}\right]u\right\|}{\|u\|}=O(D). \tag{4}$$

Для построения системы Эйнштейна–Эренфеста предположим, что существуют точные (или отличающиеся от них на величину $O(D^\infty)$) решения $u(\vec{x},t)$ нелинейного уравнения (1) в классе $\mathcal{P}_t^D$ траекторно-сосредоточенных функций с начальным условием $u(\vec{x},0)=\varphi(\vec{x})\in\mathcal{P}_0^D$.

Обозначим через

$$\vec{x}_u(t)=\int_{\mathbb{R}^n}\vec{x}u(\vec{x},t)d\vec{x}, \tag{5}$$

$$\alpha_u^{(\nu)}(t)=\int_{\mathbb{R}^n}[\vec{x}-\vec{x}_u(t)]^\nu u(\vec{x},t)d\vec{x} \tag{6}$$

средние значения переменных $\vec{x}$ и моментов $(\Delta\vec{x})^\nu$, вычисленные по решению $u(\vec{x},t)$. Здесь $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ – мультииндекс:

$$\vec{a}^{\,\nu}=a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}\cdots a_n^{\nu_n},\quad |\nu|=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n,\quad \nu!=\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_n!,\quad \alpha^{(\nu)}=\alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_n)}.$$

Эволюция средних (5), (6) определяется соотношениями

$$
\frac{d}{dt}\vec{x}_u = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}\right]u(\vec{x},t)d\vec{x};
$$

$$
\frac{d}{dt}\alpha_u^{(\nu)} = -\sum_{i=1}^{n}\nu_i\alpha_u^{(\nu_1-\delta_{1i},\ldots,\nu_n-\delta_{ni})}\frac{d}{dt}\big(x_u\big)_i - \int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}\nu_i\prod_{j=1}^{n}(x_j - x_{u_j})^{\nu_j-\delta_{ji}}\times
$$
$$
\times\left[V_{x_i}(\vec{x},t) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} W_{x_i}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}\right]u(\vec{x},t)d\vec{x} +
$$
$$
+ D\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\nu_i(\nu_k - \delta_{ki})(x_j - x_{u_j})^{(\nu_j-\delta_{ji}-\delta_{jk})}T_{ik}u(\vec{x},t)d\vec{x}.
$$

Разложив функции $V_{\vec{x}}(\vec{x},t)$, $W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\vec{x}$, $\Delta\vec{y}$ с учетом оценок (4) получим

$$
\dot{\vec{x}}_u = -\sum_{|\nu|=0}^{M}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}V_{\vec{x}}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}}\alpha_u^{(\nu)} + \sum_{|\mu|=0}^{M}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}W_{\vec{x}}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\nu)}\alpha_u^{(\mu)}\right] + O(D^{(M+1)/2}), \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_u^{(\nu)} = -\sum_{j=1}^{n}\nu_j\Bigg\{&\sum_{|\mu|=0}^{M-|\nu|+1}\left[\frac{1}{\mu!}\frac{\partial^{|\mu|}V_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\mu}} + \sum_{|\sigma|=0}^{M}\frac{1}{\mu!\sigma!}\frac{\partial^{|\mu+\sigma|}W_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\mu}\partial\vec{y}^{\sigma}}\alpha_u^{(\sigma)}\right]\alpha_u^{(\nu_1+\mu_1-\delta_{j1},\ldots,\nu_n+\mu_n-\delta_{n2})} - \\
&-D\sum_{l=1}^{n}T_{jl}(\nu_l - \delta_{jl})\alpha_u^{(\nu_1-\delta_{j1}-\delta_{l1},\ldots,\nu_n-\delta_{jn}-\delta_{ln})} + \big(\dot{x}_u\big)_j\,\alpha_u^{(\nu_1-\delta_{j1},\ldots,\nu_n-\delta_{jn})}\Bigg\} + O(D^{(M+1)/2}).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $\vec{x}$ и $\alpha^{(\nu)}$, $|\nu| = \overline{1,M}$:

$$
\begin{cases}
\dot{\vec{x}} = -\displaystyle\sum_{|\nu|=0}^{M}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}V_{\vec{x}}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}}\alpha^{(\nu)} + \sum_{|\mu|=0}^{M}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}W_{\vec{x}}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha^{(\nu)}\alpha^{(\mu)}\right], \\
\dot{\alpha}^{(\nu)} = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\nu_j\Bigg\{\sum_{|\mu|=0}^{M-|\nu|+1}\left[\frac{1}{\mu!}\frac{\partial^{|\mu|}V_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\mu}} + \sum_{|\sigma|=0}^{M}\frac{1}{\mu!\sigma!}\frac{\partial^{|\mu|+|\sigma|}W_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\mu}\partial\vec{y}^{\sigma}}\alpha^{(\sigma)}\right]\alpha^{(\nu_1+\mu_1-\delta_{j1},\ldots,\nu_n+\mu_n-\delta_{jn})} - \\
\qquad -D\displaystyle\sum_{l=1}^{n}T_{jl}(\nu_l - \delta_{jl})\alpha^{(\nu_1-\delta_{j1}-\delta_{l1},\ldots,\nu_n-\delta_{jn}-\delta_{ln})} + \dot{x}_j\alpha^{(\nu_1-\delta_{j1},\ldots,\nu_n-\delta_{jn})}\Bigg\}.
\end{cases} \tag{9}
$$

Начальные условия для системы (9) определим соотношениями

$$
\begin{aligned}
\vec{x}\,\big|_{t=0} &= \vec{x}_{\varphi}\big|_{t=0} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\vec{x}\varphi(\vec{x})d\vec{x}, \\
\alpha^{(\nu)}\big|_{t=0} &= \alpha_{\varphi}^{(\nu)}\big|_{t=0} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\vec{x} - \vec{x}_{\varphi})^{\nu}\varphi(\vec{x})d\vec{x}, \quad \varphi(\vec{x}) \in \mathcal{P}_0^D.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Систему уравнений (9) будем называть *системой уравнений Эйнштейна–Эренфеста* типа $(0, M)$ для уравнения (1).

Решения этой системы с начальными условиями (10) будем обозначать

$$
g_{\varphi}^{(M)}(t) = (\vec{x}_{\varphi}^{(M)}(t), \alpha_{\varphi}^{(\nu,M)}(t)). \tag{11}
$$

Общее решение системы (9) будем обозначать

$$g^{(M)}(t,\boldsymbol{C})=(\vec{x}^{(M)}(t),\alpha^{(\nu,M)}(t),\boldsymbol{C}),\tag{12}$$

где $\boldsymbol{C}$ — набор постоянных интегрирования.

Справедливо утверждение:

Утверждение 1. Пусть набор постоянных $\boldsymbol{C}$ определен из условия

$$g^{(M)}(0,\boldsymbol{C})=g^{(M)}_{\varphi}(0)\to \boldsymbol{C}[g,\varphi],$$

а набор C — из условия

$$g^{(M)}(t,C)=g^{(M)}_{\varphi}(t)\to C[g,\varphi].$$

Тогда $\boldsymbol{C}=C+O(D^{(M+1)/2})$.

Доказательство. Следует из теоремы о единственности решения задачи Коши.

С учетом оценок (4) справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. Решения $g^{(M)}_{\varphi}(t)$ и $\alpha^{(\nu,M)}_{\varphi}(t)$ системы Эйнштейна–Эренфеста порядка M (9) и средние (5), (6) связаны соотношениями

$$\vec{x}_u(t)=\vec{x}^{(M)}_{\varphi}(t)+O(D^{(M+1)/2}),\quad \alpha^{(\nu)}_u(t)=\alpha^{(\nu,M)}_{\varphi}(t)+O(D^{(M+1)/2}),\quad |\nu|=\overline{1,M},$$

причем $u(\vec{x},0)=\varphi(\vec{x})\in P^D_0$.

Решения нелинейного уравнения Фоккера–Планка в классе $\mathcal{P}^D_t$

Построим семейство решений уравнения (1) в классе траекторно-сосредоточенных функций $\mathcal{P}^D_t$ (3). Разложим функцию $W(\vec{x},\vec{y},t)$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\vec{y}=\vec{y}-\vec{x}_u(t)$. С учетом оценок (4) перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned}D\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t}&=\left\langle\hat{\vec{\pi}},T\hat{\vec{\pi}}\right\rangle u(\vec{x},t)+\Bigg\langle\hat{\vec{\pi}},\Bigg[V_{\vec{x}}(\vec{x},t)u(\vec{x},t)+\\&+\sum_{|\mu|=0}^{M}\frac{1}{\mu!}\frac{\partial^{|\mu|}W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{x}_u(t),t)}{\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha^{(\mu)}_u(t)u(\vec{x},t)\Bigg]\Bigg\rangle+O(D^{(M+1)/2}).\end{aligned}\tag{13}$$

Запишем вспомогательную систему уравнений, которая получается из (13) формальной заменой средних $\alpha^{(\mu)}_u(t)$, $\vec{x}_u(t)$ общим решением (12) системы Эйнштейна–Эренфеста порядка M (9):

$$D\frac{\partial v(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial t}=\left\{\left\langle\hat{\vec{\pi}},T\hat{\vec{\pi}}\right\rangle+\left\langle\hat{\vec{\pi}},\vec{\Lambda}^{(M)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))\right\rangle\right\}v(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))+O(D^{(M+1)/2}),\tag{14}$$

$$\vec{\Lambda}^{(M)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))=V_{\vec{x}}(\vec{x},t)+\sum_{|l|=0}^{M}\frac{1}{l!}\frac{\partial^{|l|}W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{x}^{(M)}(t,\boldsymbol{C}),t)}{\partial\vec{y}^{l}}\alpha^{(l,M)}(t,\boldsymbol{C}).$$

Параметрами семейства уравнений (14) являются постоянные $\boldsymbol{C}$. Справедливо

Утверждение 3. Если траекторно-сосредоточенные решения уравнений (13) и (14) удовлетворяют одному и тому же начальному условию

$$u(\vec{x},0)=v(\vec{x},0,g^{(M)}(0,\boldsymbol{C}))=\varphi(\vec{x}),\quad \varphi(\vec{x})\in\mathcal{P}^D_0,$$

то решения уравнений (13) и (14) связаны соотношением

$$u^{(M)}(\vec{x},t)=v^{(M)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))\big|_{g^{(M)}(t,\boldsymbol{C})=g_{\varphi}^{(M)}(t)}+O(D^{(M+1)/2}).$$

Здесь $g_{\varphi}^{(M)}(t)$ имеют вид (11).

Уравнение (14) будем называть *ассоциированным линейным уравнением* Фоккера–Планка–Колмогорова порядка M. Разложим функцию $\vec{\Lambda}^{(M)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{x}^{(M)}(t,\boldsymbol{C})$:

$$\vec{\Lambda}^{(M)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))=\sum_{|\sigma|=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma!}\frac{\partial^{|\sigma|}\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial\vec{x}^{\sigma}}\Delta\vec{x}^{\sigma}.$$

Представим уравнение (14) в виде

$$[\widehat{L}_0^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))+\sqrt{D}\widehat{L}_1^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))+D\widehat{L}_2^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))+\ldots]v=0, \qquad (15)$$

где $\quad v=v(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))$,

$$\widehat{L}_0^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))=D\partial_t-\left\langle\widehat{\vec{\pi}},T\widehat{\vec{\pi}}\right\rangle-\left\langle\widehat{\vec{\pi}},\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))+\frac{\partial\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_1}\Delta x_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_n}\Delta x_n\right\rangle=$$

$$=D\partial_t+\left\langle\dot{\vec{x}}^{(M)}(t,\boldsymbol{C}),\widehat{\vec{\pi}}\right\rangle-\left\langle\widehat{\vec{\pi}},\frac{\partial\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_2}\Delta x_2+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_n}\Delta x_n\right\rangle-\left\langle\widehat{\vec{\pi}},T\widehat{\vec{\pi}}\right\rangle,$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

Здесь $\vec{x}^{(M)}(t,\boldsymbol{C})$ – главный член решения системы Эйнштейна–Эренфеста (9). Из оценок (4) следует, что $\sqrt{D^k}\widehat{L}_k(t,g^{(M)}(t))=\widehat{O}(D^{(k+1)/2})$.

Траекторно-сосредоточенные решения $v(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))\in\mathcal{P}_t^D$ уравнения (15) будем искать в виде регулярного разложения по степеням $\sqrt{D}$:

$$v(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))=v^{(0)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))+\sqrt{D}v^{(1)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))+Dv^{(2)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))+\ldots \qquad (16)$$

Подставим (16) в (15) и приравняем слагаемые, имеющие одинаковую оценку по D в смысле (4). Получим следующую рекуррентную систему уравнений:

$$\widehat{L}_0^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))v^{(0)}=0, \qquad (17)$$

$$\widehat{L}_0^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))v^{(1)}+\widehat{L}_1^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))v^{(0)}=0,$$

$$\widehat{L}_0^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))v^{(2)}+\widehat{L}_1^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))v^{(1)}+\widehat{L}_2^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))v^{(0)}=0.$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

Уравнение (17) является линейным уравнением Фоккера–Планка с квадратичным по производным и координатам оператором, который мы запишем в симметризованном виде:

$$\left\{D\partial_t-\left\langle\widehat{\vec{\pi}},T\widehat{\vec{\pi}}\right\rangle-\frac{D}{2}\mathrm{Sp}\,\Omega-\frac{1}{2}\left[\left\langle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_i}\Delta x_i,\widehat{\vec{\pi}}\right\rangle+\right.\right.$$

$$+\left\langle \hat{\vec{\pi}}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{\Lambda}^{(M)}(g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))}{\partial x_i} \Delta x_i \right\rangle \Bigg] + \left\langle \dot{\vec{x}}^{(M)}(t,\boldsymbol{C}), \hat{\vec{\pi}} \right\rangle \Bigg\} v^{(0)} = 0, \quad v^{(0)} = v^{(0)}(\vec{x}, t, g^{(M)}(t,\boldsymbol{C})), \quad (18)$$

$$\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}(t,\boldsymbol{C}), \quad \Omega(t) = V_{xx}(\vec{x},t) + \sum_{|\sigma|=0}^{M} \frac{1}{\sigma!} \frac{\partial^{|\sigma|} W_{xx}(\vec{x}, \vec{x}^{(M)}(t,\boldsymbol{C}), t)}{\partial \vec{y}^{\sigma}} \alpha^{(\sigma,M)}(t,\boldsymbol{C}).$$

Частное решение уравнения (18) будем искать в виде

$$v_0^{(0)}(\vec{x}, t, g^{(M)}(t,\boldsymbol{C})) = N_D \exp\left\{ \frac{1}{D} \left[S_0(t) + D S_1(t) + \frac{1}{2} \left\langle \Delta\vec{x}, Q(t) \Delta\vec{x} \right\rangle \right] \right\}, \quad (19)$$

где $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}(t,\boldsymbol{C})$; N_D – нормировочная константа, а симметричная отрицательно определенная матрица $Q(t)$ и функции $S_0(t)$, $S_1(t)$ подлежат определению. Подставив (19) в уравнение (18) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\Delta\vec{x}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{S}_0(t) = 0, \quad \dot{S}_1(t) - \mathrm{Sp}[\Omega(t) + TQ(t)] = 0, \\ &\dot{Q}(t) - Q(t)\Omega(t) - \Omega(t)Q(t) - 2Q(t)TQ(t) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение (20) является матричным уравнением типа Риккати. Уравнения типа (18) допускают операторы симметрии, линейные по производным и координатам, общая структура которых имеет вид

$$\hat{a}(t,\boldsymbol{C}) = N_a \left[\left\langle \vec{Z}(t), D\partial_{\vec{x}} \right\rangle - \left\langle \vec{W}(t), \Delta\vec{x} \right\rangle \right], \quad (21)$$

где N_a – постоянный множитель. Вектор функции $\vec{Z}(t)$ и $\vec{W}(t)$ подлежит определению из условия равенства нулю коммутатора

$$[\hat{L}_0^{(M)}(t, g^{(M)}(t,\boldsymbol{C})), \hat{a}(t,\boldsymbol{C})] = 0. \quad (22)$$

Соотношение (22) будет выполнено, если векторы $\vec{Z}(t), \vec{W}(t)$ являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\vec{W}}(t) = \Omega(t)\vec{W}(t), \\ \dot{\vec{Z}}(t) = -2T\vec{W}(t) - \Omega(t)\vec{Z}(t), \end{cases} \quad (23)$$

которую мы назовем системой в вариациях в векторной форме.

Обозначим через $B(t)$ и $C(t)$ матрицы размера $n \times n$, элементами которых являются частные решения системы в вариациях

$$B(t) = (\vec{W}_1(t), \ldots, \vec{W}_n(t)), \quad C(t) = (\vec{Z}_1(t), \ldots, \vec{Z}_n(t)). \quad (24)$$

Матрицы (24) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{B}(t) = \Omega(t)B(t), \\ \dot{C}(t) = -2TB(t) - \Omega(t)C(t), \end{cases} \quad (25)$$

которую будем называть системой в вариациях в матричной форме. Из системы (25) следует справедливость соотношений

$$Q(t) = B(t)(C(t))^{-1}, \quad \exp\left[\int_0^t \mathrm{Sp}\, \left[\Omega(\tau) + 2TQ(\tau) \right] d\tau \right] = \frac{\det C(0)}{\det C(t)},$$

$$\exp\left[-\int_0^t \mathrm{Sp}\,TQ(\tau)d\tau\right]=\sqrt{\frac{\det B(t)\det C(t)}{\det B(0)\det C(0)}}.$$

Из общего решения системы уравнений (23) выделим $2n$ частных решений, которые будем обозначать

$$a_j^{(\pm)}(t,\boldsymbol{C})=(\vec{W}_j^{(\pm)}(t),\vec{Z}_j^{(\pm)}(t))=(W_{1j}^{(\pm)}(t),\ldots,W_{nj}^{(\pm)}(t),Z_{1j}^{(\pm)}(t),\ldots,Z_{nj}^{(\pm)}(t)),\qquad j=\overline{1,n},$$

и которые удовлетворяют начальным условиям

$$B^{(\pm)}(0)=\mathrm{diag}(\pm b_1,\ldots,\pm b_n),\quad b_i>0,\quad C^{(\pm)}(0)=\mathbb{I}_{n\times n}.$$

Так же, как и в одномерном случае, на решениях системы в вариациях сохраняется кососкалярное произведение:

$$\left\langle \vec{Z}_i^{(-)}(t),\vec{W}_j^{(+)}(t)\right\rangle-\left\langle \vec{W}_j^{(-)}(t),\vec{Z}_j^{(+)}(t)\right\rangle=2b_j\delta_{ij}.$$

Операторы симметрии (21) выберем в виде

$$\hat{a}_j^{(-)}(t,\boldsymbol{C})=-\frac{1}{\sqrt{2Db_j}}\left[\left\langle \vec{Z}_j^{(-)}(t),D\partial_{\vec{x}}\right\rangle-\left\langle \vec{W}_j^{(-)}(t),\Delta\vec{x}\right\rangle\right],\tag{26}$$

$$\hat{a}_j^{(+)}(t,\boldsymbol{C})=\frac{1}{\sqrt{2Db_j}}\left[\left\langle \vec{Z}_j^{(+)}(t),D\partial_{\vec{x}}\right\rangle-\left\langle \vec{W}_j^{(+)}(t),\Delta\vec{x}\right\rangle\right].\tag{27}$$

Тогда выполняется следующее условие:

$$[\hat{a}^{(-)},\hat{a}^{(+)}]=1.$$

Аналогично одномерному случаю мы назовем операторы $\hat{\bar{a}}^{(-)}(t,\boldsymbol{C})$, $\hat{\bar{a}}^{(+)}(t,\boldsymbol{C})$ операторами «уничтожения» и «рождения» соответственно. Функция

$$v_0=v_0^{(0)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))=N_v\sqrt{\frac{\det B^{(-)}(t)}{(-1)^n b_1\cdots b_n\det C^{(-)}(t)}}\exp\left[\frac{1}{2D}\left\langle\Delta\vec{x},Q^{(-)}(t)\Delta\vec{x}\right\rangle\right]\tag{28}$$

является вакуумным состоянием для оператора $\hat{\bar{a}}^{(-)}(t,\boldsymbol{C})$, то есть

$$\hat{\bar{a}}^{(-)}(t,\boldsymbol{C})v_0(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))=0.$$

Будем предполагать, что матрицы $B^{(-)}(t)$, $C^{(-)}(t)$ таковы, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_0(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))d\vec{x}\tag{29}$$

сходится. Сходимость интеграла (29) можно всегда обеспечить ввиду того, что матрица $Q^{(-)}(t)$ отрицательно определена, а подкоренное выражение в предэкспоненте равенства (28) тогда автоматически будет положительным. Если нормировочную константу возьмем равной

$$N_v=\sqrt{\frac{b_1\cdots b_n}{(2\pi D)^n}},$$

то интеграл (29) будет равен единице.

Определим набор функций $v_\nu(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\nu))$ как результат действия оператора $\hat{\vec{a}}^{(+)}(t,\boldsymbol{C})=(\hat{a}_1^{(+)}(t,\boldsymbol{C}),\dots,\hat{a}_n^{(+)}(t,\boldsymbol{C}))$ вида (27) на функцию (28):

$$v_\nu=v_\nu^{(\nu)}(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\nu))=\frac{1}{\sqrt{\nu!}}(\hat{\vec{a}}^{(+)}(t,\boldsymbol{C}))^\nu v_0(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C})),\quad \nu=(\nu_1,\dots,\nu_n). \tag{30}$$

В силу определения операторов $\hat{\vec{a}}^{(+)}(t,\boldsymbol{C})$ и функции $v_0(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))$ функции (30) являются решением уравнения (18).

Определим вспомогательную систему функций

$$w_\mu=w_\mu(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\mu))=\frac{1}{\sqrt{\mu!}}(\hat{\vec{b}}^{(+)}(t,\boldsymbol{C}))^\mu w_0(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C})),\quad \mu\in\mathbb{Z}_+^n,$$

где

$$w_0=w_0(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))=\sqrt{\frac{(-1)^n(b_1\cdots b_n)}{\det[B^{(+)}(t)C^{(+)}(t)]}}\exp\left[-\frac{1}{2D}\left\langle\Delta\vec{x},Q^{(+)}(t)\Delta\vec{x}\right\rangle\right], \tag{31}$$

$$\hat{\vec{b}}^{\,+}(t)=(\hat{b}_1^+(t),\dots,\hat{b}_n^+(t)),$$

$$\hat{b}_j^+(t)=\frac{1}{\sqrt{2Db_j}}\Big(\left\langle\vec{Z}_j^{(-)},D\partial_{\vec{x}}\right\rangle+\left\langle\vec{W}_j^{(-)},\Delta\vec{x}\right\rangle\Big).$$

Функция (31) является решением сопряженного для уравнения (17) линейного уравнения ФПК и принадлежит классу $(\mathcal{P}_t^D)^*$. Справедлива теорема:

Теорема 1. Система функций $\{v_\nu\}_{|\nu|=0}^\infty,\{w_\mu\}_{|\mu|=0}^\infty$ биортогональна

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}v_\nu(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\nu))w_\mu(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\mu))d\vec{x}=\delta_{\mu\nu},$$

и удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{|\nu|=0}^\infty v_\nu(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\nu))w_\nu(\vec{y},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\nu))=\delta(\vec{x}-\vec{y}).$$

Функции $v_\nu(\vec{x},t,g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\nu))$ являются асимптотическими решениями уравнения (1) с точностью $O(D^{3/2})$, если удовлетворяют начальному условию

$$u(\vec{x},t)\big|_{t=0}=\varphi(\vec{x})=v_\nu(\vec{x},0,g^{(M)}(0,\boldsymbol{C}_\nu))\Big|_{g^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_\nu)=g_\varphi^{(M)}(t)}.$$

Таким образом, функции (30) при соответствующем выборе констант интегрирования системы ЭЭ представляют собой явные аналитические выражения для счетного семейства асимптотических решений уравнения ФПК.

Заключение

К уравнению ФПК с нелокальной нелинейностью применен формализм квазиклассических асимптотик, на основе которого построены явные выражения для счетного семейства асимптотических решений уравнения (1) в классе $\mathcal{P}_t^D$ траекторно-сосредоточенных функций**.** Ключевым является утверждение 3, связывающее решение нелинейного уравнения ФПК и решение линейного ассоциированного уравнения. Семейства решений построены с помощью операторов симметрии линейного ассоциированного уравнения.

Уравнения ФПК с нелинейными интегральными членами, аналогичные уравнению (1), привлекались для статистического описания систем, подсистемы которых нелинейно взаимодействуют посредством среднего поля. Включение нелинейности в уравнение, как можно было бы ожидать, должно стать серьезной проблемой в построении решений. Однако вид нелинейности позволил применить квазиклассический метод [Маслов, Федорюк, 1976; Маслов, 1977; Белов, Доброхотов, 1988] и найти алгоритм построения асимптотических решений.

Отметим также, что формализм квазиклассических асимптотик позволяет не только найти семейство частных решений, но и дает конструктивный способ построить приближенный оператор эволюции. Пример построения оператора эволюции в одномерном случае приведен в [Шаповалов, Трифонов, Масалова, 2009].

Список литературы

Frank D. Nonlinear Fokker–Plank equations. Fundamentals and applications. N. Y., London: Springer-Verlag, 2005. 407 p.

Risken H. The Fokker–Planck equation: methods of solution and applications. N. Y.: Springer, 1989. 472 p.

Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теор. матем. физика. 1988. Т. 92, № 2. С. 215–254.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.

Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.

Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.

Шаповалов А. В., Трифонов А. Ю., Масалова Е. А. Квазиклассические асимптотики нелинейного уравнения Фоккера–Планка для распределений доходностей активов // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Т.1. № 1. С. 41–49.