

УДК: 519.63

## О спектральных свойствах одного несамосопряженного разностного оператора

А. Ю. Мокин

Государственное учебно-научное учреждение Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова,  
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы 1

E-mail: mknandrew@mail.ru

Получено 28 марта 2010 г.

Рассмотрена задача на собственные значения для несамосопряженного разностного оператора с переменным коэффициентом. Особенность задачи заключается в нелокальных граничных условиях специального вида, которым удовлетворяет решение. В весьма общих предположениях относительно переменного коэффициента определена кратность собственных чисел, построена область локализации спектра оператора.

Ключевые слова: задача на собственные значения, несамосопряженный разностный оператор

### On spectral properties of a nonselfadjoint difference operator

A. Ju. Mokin

*Lomonosov Moscow State University, The Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia*

**Abstract.** — The eigenvalue problem for a nonselfadjoint difference operator with nonconstant coefficient is considered. The main peculiarity of the problem is that its solution satisfies a two-point nonlocal boundary condition. Multiplicity of eigenvalues is discussed and a region where all eigenvalues reside is defined taking into account a very generic assumption about the nonconstant coefficient.

Keywords: eigenvalue problem, nonselfadjoint difference operator

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 143–150 (Russian).

Работа выполнена в рамках научной школы академика Моисеева Е. И. (проект НШ-7332.2010.9) при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

## Введение

В работе изучаются спектральные свойства оператора второй разностной производной, возникающего в результате аппроксимации начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k(1) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть  $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N, h = 1/N\}$  – равномерная сетка на  $[0, 1]$ ,  $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, \tau > 0\}$  – равномерная сетка по переменной  $t \geq 0$ . Обозначим через  $H$  пространство функций, заданных на сетке  $\omega_h$ . Определим функции  $y^n = y^n(x) \in H$ , при каждом  $n = 0, 1, 2, \dots$  равенством  $y^n = y(x_i, t_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , а также сеточную функцию  $a(x_i) = k(x_i - 0.5h)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Разностная схема с весами, аппроксимирующая задачу (1), может быть представлена в операторно-разностном виде

$$\begin{aligned} \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sigma Ay^{n+1} + (1 - \sigma)Ay^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ y^0 = \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma$  – весовой множитель, оператор  $A$  действует в пространстве  $H$  согласно равенствам

$$(Ay)(x_j) = -(a(x)y_{\bar{x}})_{x,j}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (Ay)(x_N) = -(2/h)(a_1 y_{x,1} - a_N y_{\bar{x},N}). \quad (3)$$

Здесь  $y_j = y(x_j)$ ,  $a_j = a(x_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , причем по определению  $y_0 = 0$ .

Дифференциальная задача (1), известная как задача Самарского–Ионкина, возникла в 70-е годы в связи с исследованием свойств параметрически неустойчивой плазмы. Ее особенность заключается в нелокальном граничном условии равенства потоков. Случай постоянного коэффициента  $k(x)$  был рассмотрен в работе [Ионкин, 1977a]. В работе [Ионкин, 1977b] изучена корректность и сходимость соответствующих схем с весами (2). В частности, получены достаточные условия устойчивости схемы по начальным данным и по правой части в сеточной среднеквадратической норме.

Дальнейшие исследования устойчивости схемы (2) в случае постоянного коэффициента  $a(x)$  выполнены в работах [Гулин и др., 2005; Гулин и др., 2006], где получены необходимые и достаточные условия устойчивости в специальной энергетической норме пространства  $H$ . При каждом  $N$  вычислены константы эквивалентности нормы, гарантирующей устойчивость, и среднеквадратической нормы. Там же доказана неумлучшаемость условий устойчивости за счет выбора нормы пространства  $H$ .

В монографии [Гулин и др., 2008] рассмотрены разностные схемы с постоянными коэффициентами, аппроксимирующие начально-краевую задачу вида (1) с нелокальным граничным условием

$$u(0, t) = 0, \quad \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \quad t > 0,$$

содержащим параметр  $\gamma \in (0, 1)$ . Основным результатом исследований является необходимое и достаточное условие устойчивости, которое, как и в случае схемы (2), является принципиально неумлучшаемым за счет выбора нормы в  $H$ .

Схемы, рассмотренные в работах [Ионкин, 1977b; Гулин и др., 2005; Гулин и др., 2006] и монографии [Гулин и др., 2008], являются несамосопряженными, что существенно затрудняет изучение их свойств. Методы исследования схем, разработанные авторами вышеупомянутых

работ, обладают широкой сферой применения и позволяют получить необходимые и достаточные условия устойчивости. Основная особенность этих методов заключается в том, что для их использования необходимо предварительно установить спектральные свойства разностных операторов, возникающих в результате аппроксимации исходной дифференциальной задачи. В частности, необходима информация об алгебраической и геометрической кратности собственных чисел операторов, требуются априорные оценки спектра, от которых зависит точность условий устойчивости схемы.

В случае самосопряженных задач или же задач с постоянными коэффициентами трудности, связанные с изучением свойств собственных чисел, удается преодолеть. Как следует из работы [Гулин и др., 2005], разностная схема (2), основной разностный оператор  $A$  которой определен равенствами (3), не является самосопряженной и не становится таковой в результате введения специального скалярного произведения в  $H$  (то есть не является симметризуемой).

Аналитические исследования спектра оператора  $A$  выполнены только для постоянного коэффициента  $a(x)$ . В случае переменного коэффициента известны результаты численных расчетов [Ионкин, Валикова, 1996], из которых следует, что коэффициент  $a(x)$  существенно влияет как на вещественность собственных значений, так и на их кратность. Следует отметить, что собственные числа с отрицательной вещественной частью, равно как и собственные числа с алгебраической кратностью, превосходящей двух, обнаружены не были.

В настоящей работе рассмотрена задача на собственные значения для оператора  $A$  с переменным коэффициентом  $a(x)$ . Свойства спектра, установленные в работе, во многом соответствуют результатам численного эксперимента. В единственном предположении  $0 < k \leq a(x) \leq K$ ,  $x \in \omega_h$  доказано, что собственные числа могут быть простыми либо двукратными. Их геометрическая кратность равна единице. Оператор  $A$  вырожден: его ядро одномерно. Все собственные числа оператора, отличные от нуля, имеют положительную вещественную часть. Получены априорные оценки спектра.

### Задача на собственные значения

Для оператора  $A$  имеет вид

$$Ax = \lambda x, \quad 0 \neq x \in H, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно (3) матрица оператора в единичном базисе определяется равенством

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & & & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 & -a_3 & & \\ & \dots & & \dots & \\ & & -a_{N-1} & a_N + a_{N-1} & -a_N \\ -2a_1 & & & -2a_N & 2a_N \end{bmatrix}.$$

Число  $\lambda$  является собственным для  $A$  тогда и только тогда, когда характеристический многочлен  $\det(A - \lambda E)$  равен нулю в этой точке.

Корни  $\lambda_k$  полинома  $\det(A - \lambda E)$  связаны с корнями  $z_k$  полинома  $P_N(z) = \det(h^2 A - zE)$  равенством  $z_k = h^2 \lambda_k$ . Представим определитель

$$\det(h^2 A - zE) = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 - z & -a_2 & & & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 - z & -a_3 & & \\ & \dots & & \dots & \\ & & -a_{N-1} & a_N + a_{N-1} - z & -a_N \\ -2a_1 & & & -2a_N & 2a_N - z \end{vmatrix}$$

в виде суммы двух слагаемых

$$\det(h^2A - zE) = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 - z & -a_2 & & & & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 - z & -a_3 & & & \\ & \dots & & & & \\ & & -a_{N-1} & a_N + a_{N-1} - z & -a_N & \\ -2a_1 & & & 0 & & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 + a_2 - z & -a_2 & & & & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 - z & -a_3 & & & \\ & \dots & & & & \\ & & -a_{N-1} & a_N + a_{N-1} - z & -a_N & \\ 0 & & & -2a_N & 2a_N - z & \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Воспользовавшись теоремой Лапласа, разложим первое слагаемое правой части равенства (4) по последней строке, в результате получим

$$P_N(z) = Q_N(z) - 2a_1(-1)^{N+1}\Delta_{N-1}.$$

Здесь  $Q_N(z) = \det(h^2L - zE)$ , матрица  $L$  имеет вид

$$L = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & & & & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 & -a_3 & & & \\ & \dots & & & & \\ & & -a_{N-1} & a_N + a_{N-1} & -a_N & \\ 0 & & & -2a_N & 2a_N & \end{bmatrix}, \quad (5)$$

определитель

$$\Delta_{N-1} = \begin{vmatrix} -a_2 & & & & & 0 \\ a_2 + a_3 - z & -a_3 & & & & \\ -a_3 & a_3 + a_4 - z & -a_4 & & & \\ & \dots & & & & \\ & & -a_{N-1} & a_N + a_{N-1} - z & -a_N & \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что  $\Delta_{N-1} = (-1)^{N-1}a_2a_3\dots a_N$  и, следовательно,

$$P_N(z) = Q_N(z) - 2a_1a_2\dots a_N.$$

Пусть оператор  $L$  определен в пространстве  $H$  равенствами

$$(Ly)(x_j) = -(a(x)y_{\bar{x}})_{x_j}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (Ly)(x_N) = (2/h)a(x_N)y_{\bar{x},N}, \quad y_0 = 0.$$

Его матрица в единичном базисе совпадает с матрицей (5). Отсюда вытекает, что собственные значения  $\mu_j$  оператора  $L$  связаны с корнями  $\nu_j$  многочлена  $Q_N(z)$  равенством  $\nu_j = h^2\mu_j$ .

Известно [Самарский, 1989], что оператор  $L$  является самосопряженным и положительно определенным в смысле скалярного произведения

$$(u, v) = h \sum_{j=1}^{N-1} u(x_j)v(x_j) + 0.5hu(x_N)v(x_N).$$

Все его собственные значения однократные, вещественные и положительные. Занумеруем их в порядке возрастания:  $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_N$ . Заметим, что

$$\mu_N < 4h^{-2} \max_{x \in \omega_h} |a(x)| \leq 4Kh^{-2}.$$

Выше перечисленные свойства оператора  $L$  позволяют представить многочлен  $Q_N(z)$  в виде

$$Q_N(z) = (\nu_1 - z)(\nu_2 - z) \dots (\nu_N - z), \quad \nu_j = h^2 \mu_j.$$

Тем самым доказано равенство

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^N (\nu_j - z) - 2 \prod_{j=1}^N a_j, \tag{6}$$

а также

**Теорема 1.** Число  $\lambda \in \mathbb{C}$  является собственным для оператора  $A$  тогда и только тогда, когда  $\nu = h^2 \lambda$  удовлетворяет уравнению

$$\prod_{j=1}^N (\nu_j - \nu) = 2 \prod_{j=1}^N a_j. \tag{7}$$

Число  $\lambda = 0$  является собственным значением оператора  $A$ . Действительно, система сеточных уравнений

$$(a(x)y_{\bar{x}})_{x,j} = 0, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad a(x_1)y_{x,1} = a(x_N)y_{\bar{x},N}, \quad y_0 = 0$$

эквивалентна равенствам

$$y_{\bar{x},j} = \text{Const}/a(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad y_0 = 0.$$

Суммируя данные равенства по  $j = 1, 2, \dots, m$  и учитывая условие  $y_0 = 0$ , восстанавливаем собственную функцию:

$$y_m = y(x_m) = \text{Const} \sum_{j=1}^m h/a(x_j), \quad m = 1, 2, \dots, N. \tag{8}$$

Таким образом, собственному числу  $\lambda = 0$  соответствует единственная с точностью до ненулевого множителя собственная функция (8).

Отсюда и из теоремы 1 следует, что полином (6) равен нулю в точке  $z = 0$ , то есть справедливы равенства

$$\det(h^2 L) = \prod_{j=1}^N \nu_j = 2 \prod_{j=1}^N a_j. \tag{9}$$

## Свойства собственных значений

Результаты, полученные в предыдущем разделе работы, позволяют исследовать кратность собственных значений оператора  $A$ .

Геометрическая кратность (то есть размерность собственного подпространства) любого собственного числа оператора второй производной  $A$  равна единице в силу граничного условия первого рода  $y_0 = 0$ . Определим возможные значения алгебраической кратности (то есть кратности как корня характеристического уравнения).

**Теорема 2.** *Алгебраическая кратность собственных значений оператора  $A$  не превосходит двух, причем только вещественные положительные собственные числа могут обладать двойной алгебраической кратностью.*

*Доказательство.* Требуется исследовать алгебраическую кратность корней полинома  $P_N(z)$ . Его производная равна производной полинома  $Q_N(z) = (\nu_1 - z)(\nu_2 - z) \dots (\nu_N - z)$ , которая в силу теоремы Роля имеет вид

$$Q'_N(z) = -N \prod_{j=1}^{N-1} (\nu_j^{(1)} - z),$$

где  $\nu_j^{(1)}$  — вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям  $\nu_j < \nu_j^{(1)} < \nu_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N-1$ . Аналогично вторая производная функции  $Q_N(z)$  представима в виде

$$Q''_N(z) = N(N-1) \prod_{j=1}^{N-2} (\nu_j^{(2)} - z), \quad \nu_j^{(1)} < \nu_j^{(2)} < \nu_{j+1}^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, N-2$$

и совпадает со второй производной полинома (6). Следовательно, если в точке  $z = z_*$  одновременно равны нулю многочлен  $\det(h^2A - zE)$  и его производная, то  $z_* \in \mathcal{R}$  и  $z_* \in (\nu_1, \nu_N)$ . При этом вторая производная многочлена заведомо отлична от нуля в данной точке.  $\square$

Следующая теорема устанавливает область локализации спектра оператора  $A$ .

**Теорема 3.** *Пусть*

$$S_N = (2a_1 a_2 \dots a_N)^{1/N} > 0, \quad K = \max_{x \in [0,1]} k(x) > 0.$$

*Корни уравнения (7) принадлежат множеству  $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ , где  $M_1 = \{\nu \in \mathcal{C}, |\nu| \leq S_N\}$ ,  $M_2 = \{\nu \in \mathcal{C}, 0 \leq \Re(\nu) \leq 4K, |\Im(\nu)| \leq S_N\}$ ,  $M_3 = \{\nu \in \mathcal{C}, |\nu - 4K| \leq S_N\}$ .*

*Доказательство.* Предположим, что  $\nu_* \notin M$ . Оценим в точке  $\nu_*$  модуль левой части уравнения (7), то есть модуль полинома  $Q_N(\nu)$ . Так как все его корни  $\nu_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  вещественные и расположены в интервале  $(0, 4K)$ , то

$$|\nu_* - \nu_j| > \min_{\nu \in \partial M} |\nu - \nu_j| = S_N, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Перемножив данные неравенства по  $j = \overline{1, N}$ , получим

$$|Q_N(\nu_*)| = \prod_{j=1}^N |\nu_* - \nu_j| > (S_N)^N = 2a_1 a_2 \dots a_N.$$

Отсюда вытекает, что число  $\nu_*$  не является решением уравнения (7).

**Следствие.** Спектр оператора  $A$  принадлежит множеству  $M^h = M_1^h \cup M_2^h \cup M_3^h$ , где  $M_1^h = \{\lambda \in \mathbb{C}, |h^2\lambda| \leq S_N\}$ ,  $M_2^h = \{\lambda \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re(h^2\lambda) \leq 4K, |\Im(h^2\lambda)| \leq S_N\}$ ,  $M_3^h = \{\lambda \in \mathbb{C}, |h^2\lambda - 4K| \leq S_N\}$ .

**Замечание к теореме 3.** Число  $S_N = S(h) > 0$  имеет конечный предел при  $h = 1/N \rightarrow 0$ , если только функция  $k(x)$  интегрируема по Риману на  $[0, 1]$ . Действительно, поскольку

$$\ln S_N = h \sum_{j=1}^N \ln a(x_j) + h \ln 2$$

и  $a(x_j) = k(x_j - 0.5h)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , то существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\ln S_N) = \int_0^1 \ln k(x) dx.$$

Отсюда вытекает существование предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} S_N = \exp \left( \int_0^1 \ln k(x) dx \right).$$

Не совершая предельного перехода, для дважды непрерывно дифференцируемых функций  $k(x)$  можно утверждать, что

$$S_N = \exp \left( \int_0^1 \ln k(x) dx \right) + O(h).$$

Учитывая здесь неравенство  $k(x) \leq K$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , получим

$$S_N \leq K + O(h).$$

Из этого неравенства следует, что при достаточно малых  $h > 0$  оценки собственных значений оператора  $A$ , полученные как следствие теоремы 3, значительно точнее тех, которые можно вывести, воспользовавшись теоремой Гершгорина.

Множество  $M^h$  содержит точки с отрицательной вещественной частью. Докажем теперь, что все собственные числа оператора  $A$ , отличные от нуля, имеют положительную вещественную часть. Справедлива

**Теорема 4.** Корни уравнения (7) принадлежат множеству

$$\{\nu \in \mathbb{C}, |\nu - \nu_N| \leq \nu_N\}.$$

*Доказательство.* Пусть  $\nu_* \in \mathbb{C}$  и  $|\nu_* - \nu_N| > \nu_N$ , тогда

$$|\nu_* - \nu_j| \geq |\nu_* - \nu_N| - |\nu_N - \nu_j| > \nu_N - (\nu_N - \nu_j), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Таким образом, справедливы неравенства  $|\nu_* - \nu_j| > \nu_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , из которых вытекает, что

$$\left| \prod_{j=1}^N (\nu_* - \nu_j) \right| = \prod_{j=1}^N |\nu_* - \nu_j| > \prod_{j=1}^N \nu_j.$$

Отсюда и из (9) следует неравенство

$$\left| \prod_{j=1}^N (\nu_* - \nu_j) \right| > 2 \prod_{j=1}^N a_j,$$

то есть число  $\nu_*$  не является решением уравнения (7).

**Следствие.** Все собственные числа  $\lambda \neq 0$  оператора  $A$  лежат в правой полуплоскости относительно мнимой оси и удовлетворяют неравенству

$$|h^2\lambda - \nu_N| \leq \nu_N. \quad (10)$$

Пересекая множество  $M^h$ , определенное следствием теоремы 3, со множеством точек  $\lambda$  комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству (10), получим окончательную оценку спектра оператора  $A$ .

**Теорема 5.** Любое собственное значение  $\lambda$  оператора  $A$  удовлетворяет одному из двух условий

1.  $|h^2\lambda - 4K| \leq S_N, \Re(h^2\lambda) > 4K,$

2.  $\Re(h^2\lambda) \in [0, 4K], |\Im(h^2\lambda)| \leq S_N, |h^2\lambda - 4K| \leq 4K,$

где  $S_N = (2a_1 a_2 \dots a_N)^{1/N}$ ,  $K = \max_{x \in [0,1]} k(x)$ .

Множество точек комплексной плоскости, содержащее согласно теореме 5 спектр оператора  $h^2A$ , изображено на рисунке 1.

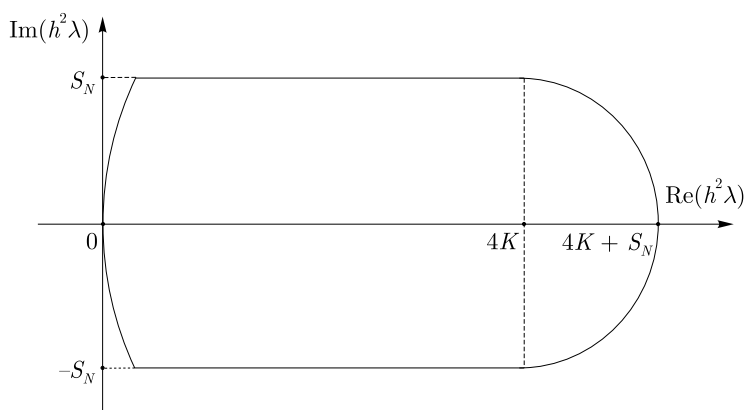


Рис. 1

В заключение автор выражает благодарность профессору Гулину А. В., Ионкину Н. И. за внимание к работе и полезные замечания.

## Список литературы

- Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Исследование нормы в задачах об устойчивости нелокальных разностных схем // *Дифференциальные уравнения*. 2006. Т. 42, № 7. С. 914–923.
- Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Разностные схемы для нелокальных задач // *Известия Вузов. Математика*. 2005. № 1 (512). С. 40–51.
- Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Устойчивость нелокальных разностных схем. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. С. 320.
- Ионкин Н. И., Валикова Е. А. О собственных значениях и собственных функциях одной неклассической краевой задачи // *Математическое моделирование*. 1996. Т. 8, № 1. С. 53–63.
- Ионкин Н. И. Разностные схемы для одной неклассической задачи // *Вестник Московского университета. Серия вычислительная математика и кибернетика*. 1977. № 2. С. 20–32.
- Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Дифференциальные уравнения*. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
- Самарский А. А. Теория разностных схем. 3 изд. М.: Наука, 1989.