**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 Т. 2 № 2 С. 143–150**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.63

О спектральных свойствах одного несамосопряженного разностного оператора

А. Ю. Мокин

Государственное учебно-научное учреждение Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы 1

E-mail: mknandrew@mail.ru

Получено 28 марта 2010 г.

Рассмотрена задача на собственные значения для несамосопряженного разностного оператора с переменным коэффициентом. Особенность задачи заключается в нелокальных граничных условиях специального вида, которым удовлетворяет решение. В весьма общих предположениях относительно переменного коэффициента определена кратность собственных чисел, построена область локализации спектра оператора.

Ключевые слова: задача на собственные значения, несамосопряженный разностный оператор

On spectral properties of a nonselfadjoint difference operator

A. Ju. Mokin

Lomonosov Moscow State University, The Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

Abstract. — The eigenvalue problem for a nonselfadjoint difference operator with nonconstant coefficient is considered. The main peculiarity of the problem is that its solution satisfies a two-point nonlocal boundary condition. Multiplicity of eigenvalues is discussed and a region where all eigenvalues reside is defined taking into account a very generic assumption about the nonconstant coefficient.

Keywords: eigenvalue problem, nonselfadjoint difference operator

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 143–150 (Russian).

Работа выполнена в рамках научной школы академика Моисеева Е. И. (проект НШ-7332.2010.9) при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Введение

В работе изучаются спектральные свойства оператора второй разностной производной, возникающего в результате аппроксимации начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1,$$
$$u(0,t) = 0, \quad k(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k(1)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \quad t > 0. \tag{1}$$

Пусть $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1,2,\ldots,N,\ h = 1/N\}$ — равномерная сетка на $[0,1]$, $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0,1,2,\ldots,\ \tau > 0\}$ — равномерная сетка по переменной $t \geqslant 0$. Обозначим через H пространство функций, заданных на сетке ω_h. Определим функции $y^n = y^n(x) \in H$, при каждом $n = 0,1,2,\ldots$ равенством $y^n = y(x_i,t_n)$, $i = 1,2,\ldots,N$, а также сеточную функцию $a(x_i) = k(x_i - 0.5h)$, $i = 1,2,\ldots,N$.

Разностная схема с весами, аппроксимирующая задачу (1), может быть представлена в операторно-разностном виде

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sigma A y^{n+1} + (1-\sigma)Ay^n = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$y^0 = \varphi(x),\ x \in \omega_h, \tag{2}$$

где σ — весовой множитель, оператор A действует в пространстве H согласно равенствам

$$(Ay)(x_j) = -\big(a(x)y_{\overline{x}}\big)_{x,j},\ j = \overline{1,N-1}, \quad (Ay)(x_N) = -(2/h)\big(a_1 y_{x,1} - a_N y_{\overline{x},N}\big). \tag{3}$$

Здесь $y_j = y(x_j)$, $a_j = a(x_j)$, $j = 1,2,\ldots,N$, причем по определению $y_0 = 0$.

Дифференциальная задача (1), известная как задача Самарского–Ионкина, возникла в 70-е годы в связи с исследованием свойств параметрически неустойчивой плазмы. Ее особенность заключается в нелокальном граничном условии равенства потоков. Случай постоянного коэффициента $k(x)$ был рассмотрен в работе [Ионкин, 1977a]. В работе [Ионкин, 1977b] изучена корректность и сходимость соответствующих схем с весами (2). В частности, получены достаточные условия устойчивости схемы по начальным данным и по правой части в сеточной среднеквадратической норме.

Дальнейшие исследования устойчивости схемы (2) в случае постоянного коэффициента $a(x)$ выполнены в работах [Гулин и др., 2005; Гулин и др., 2006], где получены необходимые и достаточные условия устойчивости в специальной энергетической норме пространства H. При каждом N вычислены константы эквивалентности нормы, гарантирующей устойчивость, и среднеквадратической нормы. Там же доказана неулучшаемость условий устойчивости за счет выбора нормы пространства H.

В монографии [Гулин и др., 2008] рассмотрены разностные схемы с постоянными коэффициентами, аппроксимирующие начально-краевую задачу вида (1) с нелокальным граничным условием

$$u(0,t) = 0, \quad \gamma\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \quad t > 0,$$

содержащим параметр $\gamma \in (0,1)$. Основным результатом исследований является необходимое и достаточное условие устойчивости, которое, как и в случае схемы (2), является принципиально неулучшаемым за счет выбора нормы в H.

Схемы, рассмотренные в работах [Ионкин, 1977b; Гулин и др., 2005; Гулин и др., 2006] и монографии [Гулин и др., 2008], являются несамосопряженными, что существенно затрудняет изучение их свойств. Методы исследования схем, разработанные авторами вышеупомянутых работ, обладают широкой сферой применения и позволяют получить необходимые и достаточные условия устойчивости. Основная особенность этих методов заключается в том, что для их использования необходимо предварительно установить спектральные свойства разностных операторов, возникающих в результате аппроксимации исходной дифференциальной задачи. В частности, необходима информация об алгебраической и геометрической кратности собственных чисел операторов, требуются априорные оценки спектра, от которых зависит точность условий устойчивости схемы.

В случае самосопряженных задач или же задач с постоянными коэффициентами трудности, связанные с изучением свойств собственных чисел, удается преодолеть. Как следует из работы [Гулин и др., 2005], разностная схема (2), основной разностный оператор A которой определен равенствами (3), не является самосопряженной и не становится таковой в результате введения специального скалярного произведения в H (то есть не является симметризуемой).

Аналитические исследования спектра оператора A выполнены только для постоянного коэффициента $a(x)$. В случае переменного коэффициента известны результаты численных расчетов [Ионкин, Валикова, 1996], из которых следует, что коэффициент $a(x)$ существенно влияет как на вещественность собственных значений, так и на их кратность. Следует отметить, что собственные числа с отрицательной вещественной частью, равно как и собственные числа с алгебраической кратностью, превосходящей двух, обнаружены не были.

В настоящей работе рассмотрена задача на собственные значения для оператора A с переменным коэффициентом $a(x)$. Свойства спектра, установленные в работе, во многом соответствуют результатам численного эксперимента. В единственном предположении $0 < k \le a(x) \le K$, $x \in \omega_h$ доказано, что собственные числа могут быть простыми либо двукратными. Их геометрическая кратность равна единице. Оператор A вырожден: его ядро одномерно. Все собственные числа оператора, отличные от нуля, имеют положительную вещественную часть. Получены априорные оценки спектра.

Задача на собственные значения

Для оператора A имеет вид

$$Ax = \lambda x, \qquad 0 \neq x \in H, \ \lambda \in \mathcal{C}.$$

Согласно (3) матрица оператора в единичном базисе определяется равенством

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & & & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 & -a_3 & & \\ & \dots & & \dots & \\ & & -a_{N-1} & a_N + a_{N-1} & -a_N \\ -2a_1 & & & -2a_N & 2a_N \end{bmatrix}.$$

Число λ является собственным для A тогда и только тогда, когда характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$ равен нулю в этой точке.

Корни λ_k полинома $\det(A - \lambda E)$ связаны с корнями z_k полинома $P_N(z) = \det(h^2 A - zE)$ равенством $z_k = h^2 \lambda_k$. Представим определитель

$$\det(h^2 A - zE) = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 - z & -a_2 & & & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 - z & -a_3 & & \\ & \dots & & \dots & \\ & & -a_{N-1} & a_N + a_{N-1} - z & -a_N \\ -2a_1 & & & -2a_N & 2a_N - z \end{vmatrix}$$

в виде суммы двух слагаемых

$$\det(h^2A - zE) = \begin{vmatrix} a_1+a_2-z & -a_2 & & & 0 \\ -a_2 & a_2+a_3-z & -a_3 & & \\ & \dots & & \dots & \\ & & -a_{N-1} & a_N+a_{N-1}-z & -a_N \\ -2a_1 & & & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+a_2-z & -a_2 & & & 0 \\ -a_2 & a_2+a_3-z & -a_3 & & \\ & \dots & & \dots & \\ & & -a_{N-1} & a_N+a_{N-1}-z & -a_N \\ 0 & & & -2a_N & 2a_N-z \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Воспользовавшись теоремой Лапласа, разложим первое слагаемое правой части равенства (4) по последней строке, в результате получим

$$P_N(z) = Q_N(z) - 2a_1(-1)^{N+1}\Delta_{N-1}.$$

Здесь $Q_N(z) = \det(h^2L - zE)$, матрица L имеет вид

$$L = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} a_1+a_2 & -a_2 & & & 0 \\ -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 & & \\ & \dots & & \dots & \\ & & -a_{N-1} & a_N+a_{N-1} & -a_N \\ 0 & & & -2a_N & 2a_N \end{bmatrix}, \tag{5}$$

определитель

$$\Delta_{N-1} = \begin{vmatrix} -a_2 & & & & 0 \\ a_2+a_3-z & -a_3 & & & \\ -a_3 & a_3+a_4-z & -a_4 & & \\ & \dots & & \dots & \\ & & -a_{N-1} & a_N+a_{N-1}-z & -a_N \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $\Delta_{N-1} = (-1)^{N-1}a_2a_3\dots a_N$ и, следовательно,

$$P_N(z) = Q_N(z) - 2a_1a_2\dots a_N.$$

Пусть оператор L определен в пространстве H равенствами

$$(Ly)(x_j) = -\left(a(x)y_{\bar{x}}\right)_{x,j},\ j = \overline{1, N-1}, \quad (Ly)(x_N) = (2/h)a(x_N)y_{\bar{x},N},\ y_0 = 0.$$

Его матрица в единичном базисе совпадает с матрицей (5). Отсюда вытекает, что собственные значения μ_j оператора L связаны с корнями ν_j многочлена $Q_N(z)$ равенством $\nu_j = h^2\mu_j$.

Известно [Самарский, 1989], что оператор L является самосопряженным и положительно определенным в смысле скалярного произведения

$$(u, v) = h\sum_{j=1}^{N-1} u(x_j)v_(x_j) + 0.5hu(x_N)v(x_N).$$

Все его собственные значения однократные, вещественные и положительные. Занумеруем их в порядке возрастания: $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_N$. Заметим, что

$$\mu_N < 4h^{-2} \max_{x \in \omega_h} |a(x)| \leq 4Kh^{-2}.$$

Выше перечисленные свойства оператора L позволяют представить многочлен $Q_N(z)$ в виде

$$Q_N(z) = (\nu_1 - z)(\nu_2 - z) \ldots (\nu_N - z), \quad \nu_j = h^2 \mu_j.$$

Тем самым доказано равенство

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^{N} (\nu_j - z) - 2 \prod_{j=1}^{N} a_j, \tag{6}$$

а также

Теорема 1. *Число $\lambda \in C$ является собственным для оператора A тогда и только тогда, когда $\nu = h^2 \lambda$ удовлетворяет уравнению*

$$\prod_{j=1}^{N} (\nu_j - \nu) = 2 \prod_{j=1}^{N} a_j. \tag{7}$$

Число $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A. Действительно, система сеточных уравнений

$$\big(a(x) y_{\overline{x}}\big)_{x,j} = 0, \ j = \overline{1, N-1}, \quad a(x_1) y_{x,1} = a(x_N) y_{\overline{x},N}, \quad y_0 = 0$$

эквивалентна равенствам

$$y_{\overline{x},j} = \mathrm{Const}/a(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad y_0 = 0.$$

Суммируя данные равенства по $j = 1, 2, \ldots, m$ и учитывая условие $y_0 = 0$, восстанавливаем собственную функцию:

$$y_m = y(x_m) = \mathrm{Const} \sum_{j=1}^{m} h/a(x_j), \quad m = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Таким образом, собственному числу $\lambda = 0$ соответствует единственная с точностью до ненулевого множителя собственная функция (8).

Отсюда и из теоремы 1 следует, что полином (6) равен нулю в точке $z = 0$, то есть справедливы равенства

$$\det(h^2 L) = \prod_{j=1}^{N} \nu_j = 2 \prod_{j=1}^{N} a_j. \tag{9}$$

Свойства собственных значений

Результаты, полученные в предыдущем разделе работы, позволяют исследовать кратность собственных значений оператора A.

Геометрическая кратность (то есть размерность собственного подпространства) любого собственного числа оператора второй производной A равна единице в силу граничного условия первого рода $y_0 = 0$. Определим возможные значения алгебраической кратности (то есть кратности как корня характеристического уравнения).

Теорема 2. *Алгебраическая кратность собственных значений оператора A не превосходит двух, причем только вещественные положительные собственные числа могут обладать двойной алгебраической кратностью.*

Доказательство. Требуется исследовать алгебраическую кратность корней полинома $P_N(z)$. Его производная равна производной полинома $Q_N(z) = (\nu_1 - z)(\nu_2 - z)\ldots(\nu_N - z)$, которая в силу теоремы Ролля имеет вид

$$Q'_N(z) = -N\prod_{j=1}^{N-1}(\nu_j^{(1)} - z),$$

где $\nu_j^{(1)}$ — вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям $\nu_j < \nu_j^{(1)} < \nu_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, N-1$. Аналогично вторая производная функции $Q_N(z)$ представима в виде

$$Q''_N(z) = N(N-1)\prod_{j=1}^{N-2}(\nu_j^{(2)} - z), \quad \nu_j^{(1)} < \nu_j^{(2)} < \nu_{j+1}^{(1)},\ j = 1, 2, \ldots, N-2$$

и совпадает со второй производной полинома (6). Следовательно, если в точке $z = z_*$ одновременно равны нулю многочлен $\det(h^2A - zE)$ и его производная, то $z_* \in \mathcal{R}$ и $z_* \in (\nu_1, \nu_N)$. При этом вторая производная многочлена заведомо отлична от нуля в данной точке. □

Следующая теорема устанавливает область локализации спектра оператора A.

Теорема 3. *Пусть*

$$S_N = (2a_1a_2\ldots a_N)^{1/N} > 0, \qquad K = \max_{x\in[0,1]} k(x) > 0.$$

Корни уравнения (7) *принадлежат множеству $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, где $M_1 = \{\nu \in \mathcal{C},\ |\nu| \le S_N\}$, $M_2 = \{\nu \in \mathcal{C},\ 0 \le \Re(\nu) \le 4K,\ |\Im(\nu)| \le S_N\}$, $M_3 = \{\nu \in \mathcal{C},\ |\nu - 4K| \le S_N\}$.*

Доказательство. Предположим, что $\nu_* \notin M$. Оценим в точке ν_* модуль левой части уравнения (7), то есть модуль полинома $Q_N(\nu)$. Так как все его корни ν_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ вещественные и расположены в интервале $(0, 4K)$, то

$$|\nu_* - \nu_j| > \min_{\nu\in\partial M}|\nu - \nu_j| = S_N, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Перемножив данные неравенства по $j = \overline{1, N}$, получим

$$|Q_N(\nu_*)| = \prod_{j=1}^{N}|\nu_* - \nu_j| > \big(S_N\big)^N = 2a_1a_2\ldots a_N.$$

Отсюда вытекает, что число ν_* не является решением уравнения (7).

Следствие. *Спектр оператора A принадлежит множеству $M^h = M_1^h \cup M_2^h \cup M_3^h$, где $M_1^h = \{\lambda \in \mathcal{C},\ |h^2\lambda| \le S_N\}$, $M_2^h = \{\lambda \in \mathcal{C},\ 0 \le \Re(h^2\lambda) \le 4K,\ |\Im(h^2\lambda)| \le S_N\}$, $M_3^h = \{\lambda \in \mathcal{C},\ |h^2\lambda - 4K| \le S_N\}$.*

Замечание к теореме 3. Число $S_N = S(h) > 0$ имеет конечный предел при $h = 1/N \to 0$, если только функция $k(x)$ интегрируема по Риману на $[0, 1]$. Действительно, поскольку

$$\ln S_N = h\sum_{j=1}^{N} \ln a(x_j) + h\ln 2$$

и $a(x_j) = k(x_j - 0.5h)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, то существует

$$\lim_{h\to 0}(\ln S_N) = \int_0^1 \ln k(x)dx.$$

Отсюда вытекает существование предела

$$\lim_{h\to 0} S_N = \exp\Big(\int_0^1 \ln k(x)dx\Big).$$

Не совершая предельного перехода, для дважды непрерывно дифференцируемых функций $k(x)$ можно утверждать, что

$$S_N = \exp\Big(\int_0^1 \ln k(x)dx\Big) + O(h).$$

Учитывая здесь неравенство $k(x) \le K$, $0 \le x \le 1$, получим

$$S_N \le K + O(h).$$

Из этого неравенства следует, что при достаточно малых $h > 0$ оценки собственных значений оператора A, полученные как следствие теоремы 3, значительно точнее тех, которые можно вывести, воспользовавшись теоремой Гершгорина.

Множество M^h содержит точки с отрицательной вещественной частью. Докажем теперь, что все собственные числа оператора A, отличные от нуля, имеют положительную вещественную часть. Справедлива

Теорема 4. *Корни уравнения* (7) *принадлежат множеству*

$$\{\nu \in \mathcal{C},\ |\nu - \nu_N| \le \nu_N\}.$$

Доказательство. Пусть $\nu_* \in \mathcal{C}$ и $|\nu_* - \nu_N| > \nu_N$, тогда

$$|\nu_* - \nu_j| \geqslant |\nu_* - \nu_N| - |\nu_N - \nu_j| > \nu_N - (\nu_N - \nu_j),\ \ j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Таким образом, справедливы неравенства $|\nu_* - \nu_j| > \nu_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, из которых вытекает, что

$$\Big|\prod_{j=1}^{N}(\nu_* - \nu_j)\Big| = \prod_{j=1}^{N}|\nu_* - \nu_j| > \prod_{j=1}^{N}\nu_j.$$

Отсюда и из (9) следует неравенство

$$\Big|\prod_{j=1}^{N}(\nu_* - \nu_j)\Big| > 2\prod_{j=1}^{N}a_j,$$

то есть число ν_* не является решением уравнения (7).

Следствие. *Все собственные числа $\lambda \neq 0$ оператора A лежат в правой полуплоскости относительно мнимой оси и удовлетворяют неравенству*

$$|h^2\lambda - \nu_N| \leq \nu_N. \tag{10}$$

Пересекая множество M^h, определенное следствием теоремы 3, со множеством точек λ комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству (10), получим окончательную оценку спектра оператора A.

Теорема 5. *Любое собственное значение λ оператора A удовлетворяет одному из двух условий*

1. $|h^2\lambda - 4K| \leq S_N$, $\Re(h^2\lambda) > 4K$,
2. $\Re(h^2\lambda) \in [0, 4K]$, $|\Im(h^2\lambda)| \leq S_N$, $|h^2\lambda - 4K| \leq 4K$,

где $S_N = (2a_1a_2 \dots a_N)^{1/N}$, $K = \max\limits_{x\in[0,1]} k(x)$.

Множество точек комплексной плоскости, содержащее согласно теореме 5 спектр оператора h^2A, изображено на рисунке 1.

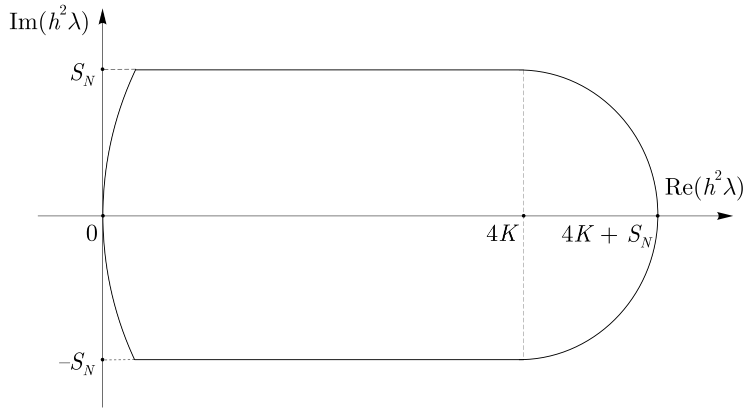

Рис. 1

В заключение автор выражает благодарность профессору Гулину А. В., Ионкину Н. И. за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Исследование нормы в задачах об устойчивости нелокальных разностных схем // *Дифференциальные уравнения*. 2006. Т. 42, № 7. С. 914–923.

Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Разностные схемы для нелокальных задач // *Известия Вузов. Математика*. 2005. № 1 (512). С. 40–51.

Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Устойчивость нелокальных разностных схем. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. С. 320.

Ионкин Н. И., Валикова Е. А. О собственных значениях и собственных функциях одной неклассической краевой задачи // *Математическое моделирование*. 1996. Т. 8, № 1. С. 53–63.

Ионкин Н. И. Разностные схемы для одной неклассической задачи // *Вестник Московского университета. Серия вычислительная математика и кибернетика*. 1977. № 2. С. 20–32.

Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Дифференциальные уравнения*. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

Самарский А. А. Теория разностных схем. 3 изд. М.: Наука, 1989.