

УДК: 519.1+538.911

Введение в теорию сложных сетей

И. А. Евин

Учреждение Российской академии наук Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,
Россия, 101990, Москва, Малый Харитоньевский переулок 4

E-mail: yevin@list.ru

*Получено 29 марта 2010 г.,
после доработки 26 мая 2010 г.*

В последние годы сложилось новое направление изучения сложных систем, рассматривающее их как сетевые структуры. Узлы в таких сетях представляют собой элементы этих сложных систем, а связи между узлами – взаимодействия между элементами. Эти исследования имеют дело с реальными системами, такими как биологические (метаболические сети клеток, функциональные сети мозга, экологические системы), технические (Интернет, WWW, сети компаний сотовой связи, сети электростанций), социальные (сети научного сотрудничества, сети актеров кино, сети знакомств). Оказалось, что эти сети имеют более сложную архитектуру, чем классические случайные сети. В предлагаемом обзоре даются основные понятия теории сложных сетей, а также кратко описаны основные направления изучения реальных сетевых структур.

Ключевые слова: феномен тесного мира, безмасштабные сети, ассортативность, каскадные отключения

Introduction to the theory of complex networks

I. A. Yevin

Mechanical Engineering Institute, 4, Maliy Charitonjevskiy pereulok, Moscow, 101909 Russia

Abstract. – There was a new direction of studying of the complex systems last years, considering them as networks. Nodes in such networks represent elements of these complex systems, and links between nodes – interactions between elements. These researches deal with real systems, such as biological (metabolic networks of cells, functional networks of a brain, ecological systems), technical (the Internet, WWW, networks of the companies of cellular communication, power grids), social (networks of scientific cooperation, a network of movie actors, a network of acquaintances). It has appeared that these networks have more complex architecture, than classical random networks. In the offered review the basic concepts theory of complex networks are given, and the basic directions of studying of real networks structures are also briefly described.

Keywords: small-world phenomenon, scale-free networks, assortativity, cascading failures

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 121–141 (Russian).

© 2010 Игорь Алексеевич Евин

Введение

В последние годы сетевая парадигма, использующая физические понятия и методы, стала основным и очень эффективным инструментом изучения реальных сложных систем. До этого сетевые структуры изучали в основном математики – специалисты по теории графов и социологи. Рождением теории графов принято считать 1736 год, когда Леонард Эйлер (1707–1783), живший и работавший тогда в Петербурге, решил известную проблему семи мостов в старом Кенигсберге (рис. 1).

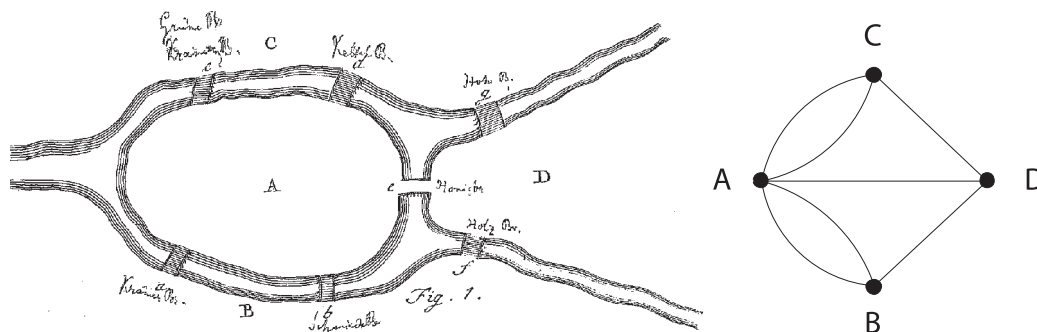


Рис. 1. Граф для проблемы Эйлера. Узлы этого графа – четыре района старого Кенигсберга, соединенные между собой семью мостами, которым соответствуют ребра графа. В 1736 году Эйлер доказал, что начав с некоторой точки, невозможно пройти все мосты и вернуться в исходную точку, не посетив один из мостов дважды [Euler, 1741]

Доказательство знаменитой теоремы о четырех красках Appel'ем и Хакеном (Kenneth Appel, Wolfgang Haken) в 1976 году (четырёх красок достаточно, чтобы раскрасить любую карту; при этом две соседние области должны быть раскрашены в разные цвета) – это наиболее известное последнее достижение в теории графов. В дальнейшем в основном вместо понятия «граф» мы будем использовать понятие «сеть».

Наиболее значительные результаты последних лет в изучении сетевых структур были получены физиками. Оказалось, что методы физики, прежде всего статистической механики, хорошо подходят для изучения проблем в этой области [Albert, Barabasi, 2002; Dorogovtsev, Mendes, 2003; Newman, 2003; Voccatti et al, 2006]. В отличие от математиков, физики в своих исследованиях опираются на эмпирические данные о реальных сетях, таких как Интернет, сети друзей и знакомых или биологические метаболические сети.

В отличие от социологов, физики исследуют статистические свойства сетей, например, законы распределения узлов по числу связей. При изучении этих вопросов было обнаружено большое количество удивительных и интригующих свойств реальных сетей, на которые не обратили внимания математики и социологи. Эти свойства послужили стимулом для разработки новых теорий, моделей, измерений, выявления новых фундаментальных свойств сетей. Именно физические журналы в настоящее время публикуют подавляющее число наиболее важных работ в этой области.

Термин «сложные сети» возник в начале этого века и относится к сетям с более сложной архитектурой, чем, скажем, классические случайные сети с заданным числом узлов и связей или решетки в кристаллах. Обычно в таких сетях имеется небольшое число узлов с большим числом связей – т. н. хабы (от английского hub – ядро, концентратор), которые в значительной степени и определяют свойства этих сетей. При этом оказалась, что большинство реальных сетей (биологических, технических, социальных) являются сложными.

Некоторые основные понятия

В современной теории сетей число связей узла (в теории графов связи и узлы это соответственно ребра и вершины графа) называется степенью (degree). Как видно из рисунка 1, нижний узел имеет степень пять, остальные узлы – степень три. Понятие степень является локальной характеристикой графа. Нелокальную, целостную структуру сети определяют двумя понятиями – путь (path) и петля (loop) или цикл (cycle). Путь – это чередующаяся последовательность смежных узлов и связей между этими узлами, когда узлы не повторяются. Циклом или петлей называется путь, когда начальный и конечный узлы совпадают. Сети без циклов называются деревьями. Число узлов N (называемое размером сети) и число связей L в деревьях связаны простым соотношением $N = L - 1$.

Кратчайшая длина пути (геодезическая линия)

Длины всех связей между смежными узлами считаются равными единице. Расстояние l_{ij} между узлами i и j есть длина самого короткого пути (геодезическая линия) между ними в сети. Среднее межузловое расстояние \bar{l} есть среднее l_{ij} по всем тем парам узлов (i, j) между которыми существует хотя бы один соединяющих их путь (сеть может содержать несоединенные между собой узлы).

Диаметр сети

Диаметр сети l_D есть максимальное расстояние между узлами сети. Зависимость \bar{l} или l_D от размера N сети зависит и от архитектуры сети. Мы будем иметь дело с сетями, в которых эта зависимость растет медленнее, чем в регулярных решетках и фракталах. Кратчайшая длина пути сети и ее диаметр являются нелокальными свойствами сети.

Решетки и фракталы

В регулярных решетках конечной размерности зависимость $\bar{l}(N)$ имеет степенной закон: $\bar{l} \propto N^{1/d}$, где d есть размерность решетки – целое число. Во фракталах, где размерность является дробным числом, $\bar{l} \propto N^{1/d_f}$, где d_f – называется фрактальной или хаусдорфовой размерностью. Легко заметить, что нет заметного различия между решетками конечной размерности и фракталами в смысле зависимости $\bar{l}(N)$ и порядком величины для \bar{l} – в обоих случаях мы имеем дело с «большим миром». Например, для двумерной решетки из 10^{12} узлов $\bar{l} \propto 10^6$.

Термин *феномен тесного мира* (*small world phenomenon*) применяется к сетевым структурам, в которых $\bar{l}(N)$ растет более медленно, чем по степенному закону с положительным индексом. Большинство исследованных реальных сетей, которые мы будем обсуждать в дальнейшем, имеют архитектуру подобного типа. Можно утверждать, что такие сети имеют бесконечную размерность [Dorogovtsev, 2010].

Реальные сети имеют небольшое число узлов: $10^2 - 10^3$ узлов в большинстве биологических сетей, порядка 10^{10} в WWW. Эти числа недостаточно велики, чтобы проверять наличие эффекта «тесного мира». Более того, эти числа не настолько велики, чтобы соответствующие сети рассматривать как макроскопические системы, в которых измерение маленькой доли системы позволяет сделать заключение обо всей системе в целом. Реальные сети представляют собой мезоскопические объекты, то есть их размеры являются промежуточными между макроскопическими и микроскопическими системами, и, чтобы определить свойства соответствующей системы, необходимо проводить измерения на всей системе.

Ориентированные графы

Если связи в сети ориентированы, что показывается стрелками, направленными от одного узла к смежному узлу, то такая сеть называется ориентированной. Примером может служить сеть цитирования научных статей. В такой сети узлами являются научные статьи, а направленными (ориентированными) связями являются ссылки на статьи внутри другой статьи.

Случайные сети

Строго говоря, понятие случайной сети не может быть применено к отдельно взятой конечной сети. В самом деле, если посмотреть на сеть определенного размера, невозможно понять, с помощью какого алгоритма (детерминистического или недетерминистического) она была построена. Поэтому в духе статистической физики случайную сеть можно определить не как единичную сеть, а как статистический ансамбль, то есть как множество сетей, в котором каждая определенная сеть имеет определенную вероятность реализации, то есть каждая сеть ансамбля имеет свой собственный статистический вес. Из этого определения следует, что данная случайная сеть представляет собой сеть с данной определенной вероятностью, другая случайная сеть есть сеть с другой вероятностью и т. д. Для того чтобы получить среднее значение для некоторой величины в случайной сети, мы усредняем эту величину по всем реализациям, принимая во внимания их статистический вес [Dorogovtsev S. N., 2010].

Простейшими случайными сетями являются так называемые классические случайные графы (модель Эрдеша–Реньи (Erdos–Renyi)), в статистическом ансамбле которых все возможные графы с числом узлов N и числом связей L имеют одинаковый статистический вес реализации. Для случайных сетей Эрдеша–Реньи $\bar{l} \propto \log N$ [Bollobas, Riordan, 2002; Krzywicki, 2003].

Как известно, в физике статистические ансамбли делятся на равновесные и неравновесные, что соответствует равновесным и неравновесным системам. Такое разделение уместно и для сетей. Ансамбли, в которых их статистические веса не изменяются во времени, не эволюционируют, называются равновесными. В неравновесных (способных к эволюции) ансамблях статистические веса изменяются во времени и множество конфигураций также изменяется. Растущие сети являются неравновесными.

Распределение узлов по числу связей (degree distribution)

Распределение узлов по числу связей $P(q)$ есть вероятность того, что случайно выбранный узел в случайной сети имеет степень q :

$$P(q) = \frac{\langle N(q) \rangle}{N}.$$

Здесь $\langle N(q) \rangle$ – среднее число узлов степени q в сети, причем усреднение берется по всему ансамблю. При этом подразумевается, что суммарное число узлов у всех членов этого ансамбля одинаково $N = \sum_q \langle N(q) \rangle$. Исследователь, изучающий эмпирически отдельный граф, скажем граф g , измеряет частоту появления узлов степени q в этом графе: $P_g(q) = N_g(q)/N$. Здесь $N_g(q)$ есть число узлов степени q в графе g . Эта величина также часто называется распределением узлов по числу связей (degree distribution), хотя проблема строгого формального описания статистического ансамбля случайных сетей с заданным законом распределения узлов по числу связей до сих пор является нерешенной [Dorogovtsev, Mendes, 2003].

Распределение узлов по числу связей является простейшей статистической характеристикой случайной сети. Замечательно то, что во многих случаях знания этой характеристики достаточно для понимания свойств этой сети и процессов, которые в ней происходят.

В классических случайных графах распределение узлов по числу связей (degree distribution) спадает довольно быстро $P(q) \propto 1/q!$, поскольку для случайных сетей распределение узлов по числу связей подчиняется закону Пуассона $P(q) = e^{-\langle q \rangle} \frac{\langle q \rangle^q}{q!}$.

Все моменты $\sum_q q^n P(q)$ для классических случайных сетей конечны, даже когда размер сети приближается к бесконечности, так как среднее значение $\langle q \rangle = \sum_q q P(q)$ имеет характерный масштаб. В этих сетях практически отсутствуют узлы с большим числом связей (хабы).

В противоположность этому, многие реальные сети – от метаболических сетей в клетках до Интернета – имеют медленно спадающее распределение узлов по числу связей, и в этих сетях хабы (узлы с большим числом связей) составляют заметную долю от всех узлов, и именно они определяют многие важные свойства этих сетей.

Асимптотическая зависимость $P(q)$ в виде степенного закона $P(q) \propto 1/q^{-\gamma}$ при больших значениях q – обычный пример медленно спадающего распределения узлов по числу связей. Распределение узлов по числу связей в виде степенного закона еще называется безмасштабным (scale free), а сами сети получили название безмасштабных сетей (scale free networks), что означает отсутствие узла с типичным числом связей в такой сети.

Кластеризация

Кластеризация – это локальная характеристика сети. Она характеризует степень взаимодействия между собой ближайших соседей данного узла. В большинстве сетей, если узел A соединен с узлом B , а узел B – с узлом C , то существует большая вероятность, что узел A соединен с узлом C (друзья наших друзей обычно также являются и нашими друзьями).

Коэффициент кластеризации данного узла есть вероятность того, что два ближайших соседа этого узла сами есть ближайшие соседи. Другими словами, если узел j имеет q_j ближайших соседей с числом t_j связей между ними, то локальный коэффициент кластеризации равен

$$C_j(q_j) = \frac{t_j}{q_j(q_j - 1)/2}.$$

Число t_j есть суммарное число треугольников – циклов длины 3 – прикрепленных к узлу j , а $q_j(q_j - 1)/2$ – максимально возможное число треугольников. Если все ближайшие соседи узла j взаимосвязаны, то $C_j = 1$. Когда между ними нет связей (как у деревьев), то $C_j = 0$.

Кластеризация всей сети определяется как

$$C = 3 \frac{M_{\Delta}}{M_{\vee}},$$

где M_{Δ} – число треугольников в сети, а M_{\vee} – число связанных триад, где «связанная триада» означает узел и два его ближайших соседа. Можно показать, что число триад из узлов равно $\sum_i q_i(q_i - 1)/2 = N(\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2)/2$.

По сути, коэффициент кластеризации C есть доля тех триад, у которых есть три ребра, образующих треугольник, то есть циклов длины 3.

Среднее значение кластеризации по всем узлам

$$\langle C \rangle = \frac{1}{n} \sum_i C_i.$$

Таким образом, кластеризация характеризует статистику циклов (треугольников) в сети. Важно то, что большинство реальных сетей в мире обладают высокой кластеризацией, на порядки превышающей кластеризацию классических случайных сетей в модели Ердеша–Реньи

$$C(q) \cong \frac{\langle q \rangle}{N}.$$

Матрицы смежности

Сетевые структуры можно описывать в матричной форме. Сеть из N узлов описывается квадратной матрицей смежности a размерности $N \times N$, в которой ненулевые элементы матрицы

обозначают наличие связей между соответствующими узлами. Для неориентированных сетей недиагональный элемент a_{ij} матрицы смежности равен числу связей между узлами i и j , и, следовательно, матрица для такой сети симметрична. Предполагается, что петли единичной длины и кратные связи запрещены, следовательно, значения диагональных элементов a_{ii} равны нулю.

Любые структурные свойства сети могут быть выражены через свойства матрицы смежности. Например, степень узла i равна $q_i = \sum_j a_{ij}$. Численные расчеты с матрицами смежности для сетей больших размеров требуют значительных ресурсов памяти компьютера. К счастью, часто удается упрощать работу с матрицами смежности, поскольку реальные сети и их модели являются *разреженными*. То есть число соединений в таких сетях значительно меньше, чем у полностью связанной сети $L \ll N^2$ или $\langle q \rangle \ll N$. Таким образом, огромное большинство элементов матриц смежности реальных сетей равно нулю.

Возникновение гигантского связанного кластера

В пределе с фиксированным $\langle q \rangle$ при $N \rightarrow \infty$ мы получаем разреженные сети, в которых число связей в узле намного меньше, чем в полностью связанном графе. В таких неориентированных сетях можно ввести понятие гигантского связанного кластера узлов сети. Если относительный размер наибольшего связанного кластера узлов сети приближается к ненулевому значению при росте числа узлов к бесконечности, этот кластер называется гигантским связанным кластером или наибольшей связанной компонентой сети. В этом случае размер следующего по величине связанного кластера узлов будет малым по сравнению с гигантским связанным кластером для достаточно большой сети. Без гигантского связанного кластера сеть представляет собой лишь множество маленьких разделенных кластеров. Оказалось, что в классических случайных сетях гигантский связанный кластер существует, если среднее число связей узла превышает единицу. Возникновение такого кластера можно рассматривать как структурный фазовый переход.

Сети тесного мира и безмасштабные сети

Эксперимент Милграма

В 1967 году социолог из Гарвардского университета С. Милграм (Stanley Milgram) на основе своего социологического исследования сделал удивившее многих утверждение: каждого человека на земном шаре можно связать с любым другим человеком цепочкой из шести знакомых [Milgram, 1967].

Он разослал 296 писем с одинаковым содержанием случайно выбранным людям в двух разных городах США (196 человек в г. Омаха, штат Небраска и 100 человек в Бостоне, штат Массачусетс). В этих письмах сообщалось, что данное письмо должно достигнуть определенного человека в Бостоне, с которым эти 296 человек не были знакомы, и адрес этого человека им не был известен. При этом эти люди должны пересылать письма только тем своим знакомым, которые, по их мнению, могут им помочь достигнуть нужного конечного адресата. В эксперименте С. Милграма из 296 писем, 69 достигли цели, что составляет 29 % от общего числа. Средняя длина пути оказалась равной 6.2. Этот эксперимент считается первым эмпирическим доказательством «явления тесного мира» («small world phenomenon»).

36 лет спустя был осуществлен эксперимент в большем масштабе с использованием электронной почты. Было выбрано 24163 добровольца, которые послали электронные письма своим знакомым. Конечными получателями были 18 человек из 13 стран. Завершенными оказались только 384 (!) цепочки, что указывает на то, что социальные сети на глобальном уровне довольно сильно разрежены. Однако средняя длина пути оказалась около четырех степеней разделения, то есть даже меньше, чем «шесть ступеней».

Таким образом, несмотря на то, что на Земле живет более шести миллиардов людей, мир действительно тесен. Это свойство социальной коммуникации получило еще название «шесть ступеней разделения» – по названию бродвейской пьесы, а затем и фильма (“Six degrees of separation”) [Guare, 1990]. Героиня этого фильма говорит:

*«Я где-то читала, что каждый на нашей планете отделен от другого человека только шестью людьми. Шесть ступеней разделения я... Между нами и любым другим на планете. Президентом Соединенных Штатов. Гондольером в Венеции. ...Не обязательно известные имена. С любым. Можно найти ровно шесть людей, чтобы установить связь. Туземцем в джунглях. Эскимосом.
...Каждая персона как новая дверь, распахнутая в остальной мир».*

Социологические исследования показывают, что люди сгруппированы в малые кластеры друзей, коллег и знакомых и эти кластеры обычно слабо связаны с другими аналогичными кластерами. В социологии это называется кластеризацией. Поэтому чем лучше ваши друзья знают друг друга, тем в меньшей степени вы можете рассчитывать на то, что они помогут вам связаться с незнакомым вам человеком.

Кляйнберг первым обратил внимание на то, что в эксперименте Милграма не только показывается существование кратчайшего пути между любой парой в социальной сети, но и на тот факт, что люди вполне успешны в нахождении этих кратчайших путей [Kleinberg, 2000]. Он продемонстрировал, что эта задача нетривиальна даже для простой сети, если людям незнакома ее структура. В эксперименте Милграма его участники, несомненно, не знали структуру всех связей сети знакомств. Кляйнберг предложил возможный механизм навигации в такого рода социальных сетях: хотя никто не знает всю сеть в целом, каждый имеет друзей или знакомых на различных расстояниях и имеет приблизительное интуитивное представление как близок каждый из них к любой конечной цели эксперимента. Произвольно выбранный начальный участник эксперимента, скажем из Нью-Йорка, для того, чтобы его письмо достигло незнакомого ему получателя в Лос-Анджелесе, отправит его своему знакомому в Калифорнии. Это знакомый в свою очередь, сделает более короткий шаг, переслав письмо своему знакомому в Лос-Анджелесе и этот процесс повторится со всё более короткими шагами до тех пор, пока письмо не попадет к кому-то, кто знает конечного получателя. Таким образом, процесс будет успешным, если люди имеют адекватное представление о распределении друзей в зависимости от расстояния до конечного получателя. Если же такое представление отсутствует, то цепочка шагов либо оборвется, либо сами шаги будут очень маленькими, а их число может быть очень большим. Таким образом, успешность эксперимента Милграма означает, что социальные сети имеют особую структуру, для которых может быть введены различные метрики для расстояний.

Исследования Воттса и Стрэгатца.

В середине 1990 годов С. Стрэгатц (Steven Strogatz) и его аспирант Д. Воттс (Duncan Watts) из Корнельского университета в Итаке (штат Нью-Йорк) решили изучить свойства сетей, которые обладают свойством тесного мира. Компьютерное моделирование различных типов сетей показало, что этим свойством обладают сети с высокой степенью кластеризации и малой средней длиной пути между узлами [Watts, 2004; Strogatz, 2003]. Сеть актеров Голливуда, нейронная сеть червя-нематода, структура Интернета и Всемирной паутины (WWW) также обладают феноменом тесного мира. Например, исследования, проведенные в университете Нотр Дам, США, показали, что среднее число кликов, которые необходимо сделать, чтобы перейти от одной Web-странички на любую другую, описывается формулой

$$D \propto 0.35 + 2.06 \log(N),$$

где N – число узлов в WWW.

Известно, что $N \propto 10^{10}$ (данные 2000 года), и получаем $V \propto 18 \div 19$, следовательно, Всемирная паутина представляет собой тесный мир.

Сети тесного мира

Воттс и Строгатц выделили специальный класс сложных сетей, которые обладают эффектом «тесного мира» и назвали их сетями тесного мира. Регулярные кристаллические решетки имеют высокое значение коэффициента кластеризации и большую среднюю длину пути. Классические случайные сети имеют низкое значение коэффициента кластеризации и небольшую среднюю длину пути.

Сети тесного мира или сети Воттса–Строгатца (WS networks) можно рассматривать как суперпозицию регулярных решеток и классических случайных сетей, например Ердеша–Реньи, поскольку они обладают высокой кластеризацией и низким значением средней длины пути. Сети тесного мира – весьма специфический вид сетевых структур. При этом важно иметь в виду, что свойством тесного мира обладает несравненно более широкий класс сетей, чем сети Воттеса–Строгатца – практически все реальные сети. Формально сети со свойством «тесного мира» имеют бесконечную размерность. Реальные сетевые структуры, как правило, имеют и высокий коэффициент кластеризации.

Безмасштабные сети

В 1999 году физик из университета Нотр Дам (США) Л. Барабаши (Laszlo Barabasi) вместе со своей аспиранткой Р. Альберт (Reka Albert) изучали свойства реальных сетей с несколько иной точки зрения. Если Строгатц и Воттс в своем исследовании сетей исходили из феномена тесного мира, то Барабаши и Альберт решили исследовать закон распределения узлов некоторых реальных сетей по числу связей. Результат также оказался неожиданным [Albert, Barabasi, 2002; Barabasi, 2002].

Вместо распределения числа связей по закону Пуассона, который имеет строгий максимум около среднего значения, для многих реальных сетей, например, таких как метаболические сети и белковые взаимодействия в клетках, структура авиационных сообщений в США, структура Интернета и его виртуального двойника World Wide Web и т. д., такого среднего значения не существует, а соответствующее вероятностное распределение подчиняется свойственному всем критическим состояниям степенному закону

$$P(q) \propto q^{-\lambda}.$$

Таким образом, во многих реальных сетях небольшое число узлов содержит очень большое число связей, а огромное число узлов содержит лишь несколько связей. Такие сети получили название безмасштабных сетей (scale free networks).

Для безмасштабных сетей $\bar{l} \propto \log \log N$, где N – число узлов в сети, что значительно меньше, чем для случайных сетей Ердеша–Реньи, в которых, напомним, $\bar{l} \propto \log N$.

Недавно получены свидетельства того, что функциональные связи в мозге человека образуют безмасштабные сети. В мозге животных и человека постоянно идут процессы самоорганизации и распада функциональных нейронно-сетевых структур. Каждая такая сеть, объединяющая нейронные ансамбли из разных отделов мозга, создается для реализации определенной функции мозга – поведенческой, когнитивной и т. п. Именно такие функциональные нейронные сети стали объектом изучения группы исследователей во главе с Д. Чиаervo (Dante Chialvo), целью которых было проверить возможность приложения идей и методов современной теории сетей (безмасштабные сети, сети тесного мира и т. д.) к топологии реальных функциональных структур мозга [Chialvo, 2007].

Используя метод магнитно-резонансного изображения, измерялась активность мозга при осуществлении простого моторного действия на каждом временном интервале в 2.5 секунды на протяжении 400 таких интервалов. Изучалась область мозга размером $36 \times 64 \times 64$ пространственных ячеек с размером каждой ячейки $3 \times 3.475 \times 3.475$ мм³.

Обозначим активность каждой такой ячейки x в момент времени t как $V(x, t)$. Каждые две ячейки будем считать функционально связанными между собой, если значение пространственно-временной корреляции $r(x_1, x_2)$ между ними превышает некоторый порог r_c . Само значение корреляции вычисляется по следующей формуле:

$$r(x_1, x_2) = \frac{\langle V(x_1, t)V(x_2, t) \rangle - \langle V(x_1, t) \rangle \langle V(x_2, t) \rangle}{\sigma(V(x_1))\sigma(V(x_2))},$$

где $\sigma^2(V(x)) = \langle V(x, t)^2 \rangle - \langle V(x, t) \rangle^2$, а $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по времени.

Разделив мозг на тысячи ячеек, каждая размером в несколько миллиметров, фиксировалась активность каждой такой ячейки при выполнении таких простых функций, как, например, стук пальцем по столу. При регистрации активности каждой такой ячейки можно определить, какие ячейки взаимосвязаны между собой (если активность ячеек в разных частях мозга проявляет свойство синхронности, то это указывает на то, что между ними есть связь). Оказалось, что такие связанные ячейки образуют безмасштабную сеть, содержащую 31 203 узла, со свойствами тесного мира $P(k) \approx k^{-\gamma}$, $\gamma \approx 2$.

В последнее время структурные свойства продуктов художественного творчества также стали изучаться с применением методов теории сложных сетей. Например, партитура музыкального произведения легко преобразуется в сетевую структуру, если в качестве узлов такой сети взять музыкальные ноты всех возможных длительностей [Liu et al, 2010]. Нетрудно подсчитать, что число узлов в такой сети не будет превышать 1800. В самом деле, число клавиш у рояля равно 88 и, умножая это число на 20 – число длительностей ноты (половинные, четверти, восьмые и т. д.), получаем 1760. Связи между узлами (нотами) в сети устанавливаются по хронологическому принципу: если нота I начинает звучать в момент времени T , а нота J в этот момент заканчивает свое звучание, то между соответствующими узлами сети есть связь.

Ли (Xiaofan Liu), Тсе (Chi K. Tse) и Смол (Michael Small) из политехнического университета Гонконга проанализировали статистические свойства сетей, построенных по описанному выше принципу, для произведений Баха, Моцарта, Шопена и современных китайских композитов, работающих в жанре поп-музыки. Все эти сети оказались безмасштабными. Среднее число шагов между узлами в этих сетях варьируют в диапазоне от 2.8 до 4.2. Коэффициенты кластеризации C лежат в пределах от 0.48 (Бах) и 0.36 (Шопен) до 0.26. Другие параметры сетей также изменялись довольно значительно для различных произведений [Liu et al, 2010].

Модель Барабаши–Альберт

Барабаши и Альберт предложили простую и элегантную модель возникновения и эволюции безмасштабных сетей. Они показали, что для возникновения безмасштабных сетей необходимы два условия [Albert, Barabasi, 2002]:

1. *Рост*. Начиная с небольшого числа m_0 узлов, на каждом временном шаге добавляется один новый узел с m ($m \leq m_0$) связями, которые соединяют этот новый узел с m различными уже существующими узлами.
2. *Предпочтительное присоединение (Preferential attachment)*. Когда выбираются узлы, к которым присоединяется новый узел, предполагается, что вероятность Π с которой новый узел будет соединяться с уже существующим узлом i , зависит от числа связей q_i , которыми этот узел уже связан с другими узлами, так что

$$\Pi(q_i) = q_i / \sum_j q_j.$$

Безмасштабные сети – это одно из проявлений феноменологии критических явлений в сложных системах, поскольку их структура подчиняется степенному закону.

Структура сложных сетей

Нагрузка узла (*betweenness centrality*)

Для многих социальных сетей, например для сети актеров кино, необходимо определить относительную важность входящих в нее узлов. Например, загруженность актера i в сети актеров (между двумя актерами кино имеется связь, если они снялись в одном фильме) определяется как суммарное число кратчайших путей между всеми остальными актерами (узлами), которые проходят через актера (узел) i :

$$B(i) = \sum_{st} \sigma_{st}(i) / \sigma_{st},$$

где $\sigma_{st}(i)$ – число кратчайших путей из узла s в узел t через узел i и σ_{st} – общее число кратчайших путей между всеми парами s и t .

Эту величину можно считать индикатором наиболее влиятельных и важных персон (VIP) в социальной сети. Эта величина также важна в изучении транспортных потоков и обычно называется нагрузкой (загруженностью) узла (или связи), поскольку характеризует долю проходящих через узел кратчайших путей и узлы с высоким значением B являются наиболее загруженными. В отличие от степени узла, понятие важности узла отражает топологию всей сети.

Подграфы и мотивы

Безмасштабные свойства сложных сетей отражают их крупномасштабную структуру. Для характеристики локальных структурных свойств сетей используется подход на основе анализа паттернов связей узлов. Например, связанный подграф представляет собой подмножество узлов, соединенных между собой специфической структурой соединений. Так, узлы A, B, C образуют треугольный подграф, а узлы A, B, F и G образуют четырехугольный подграф (рис. 2). Число различных возможных подграфов растет экспоненциально с ростом числа узлов в сети.

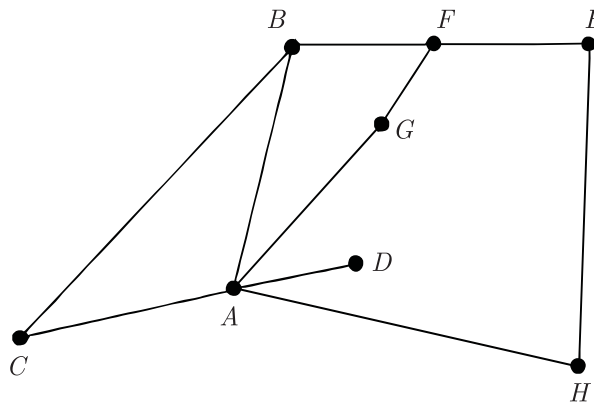


Рис. 2. Различные типы подграфов в сети

Не все подграфы возникают в сетях с одинаковой частотой. В самом деле, в квадратных решетках имеются только квадратные подграфы, и мы никогда не найдем в них, скажем, треугольные или пятиугольные подграфы. В сложных сетях со случайным соединением связей между узлами можно обнаружить и треугольные, и квадратные, и пятиугольные подграфы.

При этом некоторые подграфы, называемые мотивами, имеют большую частоту появления в сетях определенной структуры, чем в рандомизированных версиях тех же самых сетей. Например, ориентированный треугольный подграф на рисунке 3 можно обнаружить во многих биологических сетевых структурах (нейронных сетях, регуляторных клеточных структурах), в то время как мотив из четырех узлов (рис. 4) можно найти в электрических сетях, но его не встретишь в биологических структурах.

Чтобы определить мотив, характеризующий данную сетевую структуру, определяют все подграфы из n узлов. Затем сеть рандомизируется (алгоритм рандомизации сети описан, на-

пример, в [Farkas et al, 2004]), оставляя при этом неизменным число узлов, связи между узлами и число связей (степень) каждого узла. Подграфы, которые возникают гораздо чаще в реальной сети, чем в рандомизированной ее версии, и являются мотивами данной сети.

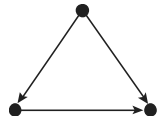


Рис. 3. Ориентированный треугольный подграф

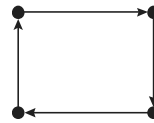


Рис. 4. Ориентированный четырехугольный подграф

Клики, сообщества, коммуны

Кликами (cliques) называются полносвязные подграфы некоторой сети. Изучение сообществ (communities) в сетях имеет довольно длительную историю. Оно тесно связано с задачами разбиения графов на подграфы. В последние годы разработка соответствующих методов получила сильный импульс в теории сложных сетей социальной природы [Newman, 2003; Newman, 2008].

Под сообществами понимаются подграфы, для которых связи между узлами внутри подграфов сильнее и многочисленнее, насыщеннее, чем между узлами различных подграфов (рис. 5).

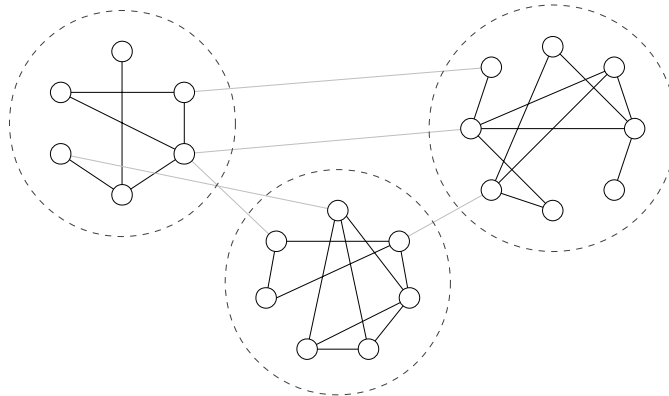


Рис. 5. Схематическое изображение сети из трех сообществ. Reprinted with permission from Newman M. E. J., Girvan M. Finding and evaluating community structure in networks // Phys. Rev. E 69, 026113. © 2004 by the American Physical Society

В алгоритме, предложенном Гирваном и Ньюманом [Newman, Girvan, 2004], связи с максимальной важностью (betweenness centrality) удаляются одна за другой. Каждое такое удаление изменяет структуру кратчайших путей в сети, а следовательно, и важность каждой связи, и поэтому эти параметры пересчитываются после каждого удаления. На некотором шаге сеть оказывается разделенной на два кластера – два самых больших сообщества и далее процедура продолжается. В результате получается дерево, в котором сообщества малых размеров включены в более большие сообщества. Распределение по размерам сообществ, выявляемых в результате этой процедуры, в большинстве реальных сетей подчинено степенному закону.

Ассортативное и дисассортативное смешивание

Термин «ассортативное спаривание» (assortative mating), то есть подбор подобного к подобному, возник в биологических исследованиях, когда при селекции исследовалось по каким параметрам и признакам происходит подбор пар при спаривании.

Термин «ассортативное смешивание» (assortative mixing) возник в социологии, в частности, при изучении закономерностей формирования супружеских пар [Newman, 2002]. В таблице 1 приводятся данные такого исследования в г. Сан-Франциско (Калифорния, США) для 1958 супружеских пар различных рас, которые показывают четкую тенденцию в образовании пар из представителей одной расы.

Социологические исследования показали, что сети друзей также формируются на основе общего языка, расы, возраста, уровня образования и, доходов и т. п. В таких случаях говорят, что соответствующие сети обладают свойствами ассортативного смешивания. Возможно, именно это является главной причиной, что в странах и городах с более чем одним языком и (или) этносом можно ожидать появления стратифицированных сообществ, например чайнатаунов в некоторых мегаполисах. Если же сетевые структуры формируются по антагонистическому принципу, они, по определению, обладают свойством дисассортативного смешивания.

Табл. 1. Расовые предпочтения при образовании супружеских пар в г. Сан-Франциско. Reprinted with permission from Newman M. E. J. Mixing patterns in networks // Phys. Rev. E 67, 026126. © 2003 by the American Physical Society

		Женщины			
		Афро-американцы	Мексиканцы	Светлокожие	Остальные
Мужчины	Афро-американцы	506	32	69	26
	Мексиканцы	23	308	114	38
	Светлокожие	26	46	599	68
	Остальные	10	14	47	32

На рис. 6 показаны возрастные данные для супругов на момент регистрации брака.

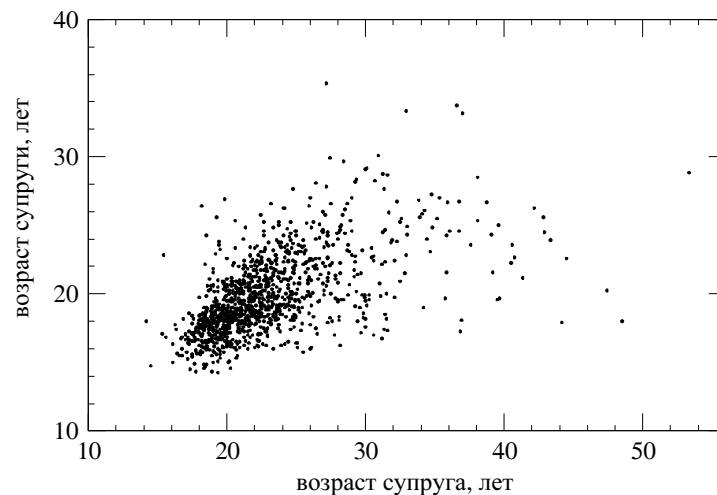


Рисунок 6. Возрастные данные для супружеских пар г. Сан-Франциско. Reprinted with permission from Newman M. E. J. Mixing patterns in networks // Phys. Rev. E 67, 026126. © 2003 by the American Physical Society

Ассортативность r в таблице 2 служит мерой тенденции узлов сети оказаться соединенными с другими узлами с одним и тем же числом связей. Его можно определить как коэффициент Пирса:

$$r = \frac{L \sum_{i=1}^L j_i k_i - \left[\sum_{i=1}^L j_i \right]^2}{L \sum_{i=1}^L j_i^2 - \left[\sum_{i=1}^L j_i \right]^2}.$$

Здесь L – число связей в сети, а j_i и k_i – число связей у узлов на обоих концах связи i . Если узлы с большим числом связей (хабы) связаны друг с другом, то $r \approx 1$. Если узлы с большим числом связей связаны с узлами с небольшим числом связей, то $r \approx -1$.

Социальные сети имеют фундаментальные отличия от других типов сетей, например технических и биологических, по двум важным характеристикам. Первое, они имеют не-

обычно высокую кластеризацию, или транзитивность. Например, для сети сотрудничества математиков $C = 0.59$. Даже для исследованной недавно сети героев древнегреческих мифов $C = 0.41$ [Choi, Kim, 2007]. Напомним, также, что для сетей, описывающих структуру музыкальных произведений [Liu et al, 2010], а также для функциональных сетей мозга [Chialvo, 2007] кластеризация тоже высока. Возможно, это свойство стало одной из причин возникновения сознания у человека.

Таблица 2. Ассортативность социальных, технологических и биологических сетей. Reprinted with permission from Newman M. E. J. Mixing patterns in networks // Phys. Rev. E 67, 026126. © 2003 by the American Physical Society

	Сеть	Тип	Размер n	Ассортативность r
Социальные	соавторов по физике	неориентированная	52 909	0.363
	соавторов по биологии	неориентированная	1 520 251	0.127
	соавторов по математике	неориентированная	253 339	0.120
	сотрудничества актеров кино	неориентированная	449 913	0.208
	директоров компаний	неориентированная	7 673	0.276
	связей студентов	неориентированная	573	-0.029
	адресов электронной почты	ориентированная	16 881	0.092
Технологические	сеть электростанций	неориентированная	4 941	-0.003
	Интернет	неориентированная	10 697	-0.189
	«Всемирная паутина» (WWW)	ориентированная	269 504	-0.067
	взаимозависимости программного обеспечения	ориентированная	3 162	-0.016
Биологические	взаимодействий белков	неориентированная	2 115	-0.156
	метаболическая сеть	неориентированная	765	-0.240
	нейронная сеть	ориентированная	307	-0.226
	морская пищевая сеть	ориентированная	134	-0.263
	пресноводная пищевая сеть	ориентированная	92	-0.326

Во-вторых, у биологических и социальных сетей разные знаки ассортативности r . Биологические сети формируются по принципу дисассортативного смешивания (см. табл. 2), при этом рост популяций животных происходит по логистическому закону:

$$\frac{dN}{dt} = N(\alpha - \gamma N),$$

где N – численность популяции, α , γ – константы, а рост популяции людей, в сообществах которых доминирует закон ассортативного смешивания, описывается уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = \beta N^2.$$

С. П. Капица связывает изменение в законе репродуктивного поведения у человека по сравнению с репродуктивным поведением животных с появлением общественного сознания у людей [Капица, 2009].

Хорошо известно, что социальные сети делятся на группы или коммуны, и, возможно, это объясняет наблюдаемую их необычную кластеризацию и положительную корреляцию по распределению связей в смежных узлах. Используя модели социальных сетей, можно показать, что если такую сеть разделить на группы или сообщества, то даже эта простая процедура объясняет оба различия в значениях коэффициентов корреляции и кластеризации между социальными и несоциальными (техническими и биологическими) сетевыми структурами.

Критические явления в сложных сетях

Критические явления в сетевых структурах включают в себя широкий спектр (форм поведения) явлений: структурные изменения в сетях, возникновение критического состояния – безмасштабной сетевой архитектуры, разнообразные перколяционные явления (например возникновение эпидемиологического порога), критические точки в различных оптимизационных проблемах и многие другие. Многие из этих критических явлений тесно связаны между собой, имеют сходную природу и допускают универсальное описание [Dorogovtsev et al, 2008].

Устойчивость к атакам

Для сложных систем, взаимодействия элементов которых описываются случайными сетями Ердеша–Реньи, их устойчивость к ошибкам и повреждениям может быть исследована методами теории перколяции. Исследования показывают, что при произвольном удалении узлов из случайного графа существует определенное критическое значение, измеряемое отношением числа удаленных узлов к общему числу узлов в сети, выше которого сеть распадается на отдельные кластеры.

Для безмасштабных сетей такого критического числа не существует. Численные эксперименты показывают, что при удалении даже 80 % узлов, оставшиеся узлы продолжают образовывать связанный кластер. Следовательно, безмасштабные сети очень устойчивы к случайным повреждениям или внешним, случайным воздействиям. Эта устойчивость объясняется неомогенной топологической структурой этих сетей. Но у таких сетей существует своеобразная ахиллесова пята [Albert, Barabasi, 2002]. Например, хакер может существенно повредить WWW, если выведет из строя один или несколько наиболее связанных сайтов (рис. 7).

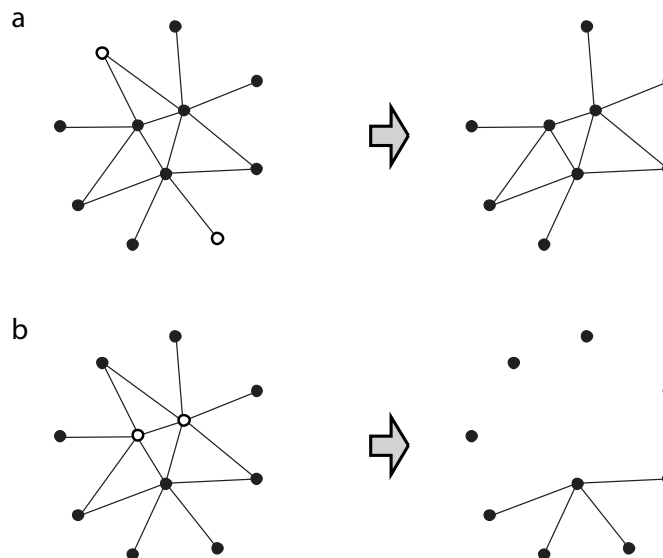


Рис. 7. а) случайное удаление узлов не разрушает структуру сети; б) целенаправленное удаление узлов с большим числом связей приводит к распаду структуры сети

С проблемой устойчивости сети при случайных повреждениях (перколяционной проблемой) тесно связана задача исследования распространения инфекции: как распространение вирусов в сети WWW, мобильных телефонов или электронной почты, так и распространение вирусов биологической природы в социальных сетях [Wang et al, 2009]. Низкая величина скорости распространения заболевания соответствует высокой доле удаленных узлов или связей гигантской связанной компоненты сети в случайно поврежденной сети. Отсутствие эпидемического порога означает невозможность удалить гигантскую связанную компоненту случайным удалением узлов или связей в бесконечных сетях. Если сеть конечна, то гигантская связанная компонента может быть удалена случайным удалением достаточно большой, но конечной доли узлов, и, следова-

тельно, эпидемический порог существует. Вспомним, однако, что, как правило, реальные сети малы. Лучший метод иммунизации (вакцинации), то есть деинтеграции сети – это метод, связанный с удалением минимального числа связей (или узлов) [Wang et al, 2009].

Синхронизация в сетях

Синхронизацией называется подстройка ритмов автоколебательных систем за счет слабого взаимодействия между ними. В простейшем случае две автоколебательные системы с изначально различными частотами и независимыми фазами, будучи слабо связанными, подстраивают свои ритмы и начинают осциллировать на одной частоте. При этом возникает определенное устойчивое соотношение между фазами этих двух осцилляторов [Strogatz, 2003; Пиковский и др., 2003].

Важно подчеркнуть, что выравнивание частот выполняется в некотором диапазоне изначальной расстройки по частоте. Синхронизация называется взаимной, когда два или несколько осцилляторов в равной степени воздействуют друг на друга и взаимно подстраивают свои ритмы.

Другой важный вид синхронизации – это синхронизация внешней силой. Примером является подстройка ритма «бодрствование – сон» к внешнему ритму освещенности, связанному с вращением Земли. В этом случае воздействие одностороннее – ни человек, ни животное не влияют на вращение Земли.

Явление синхронизации было открыто в 1665 году великим голландским физиком Христианом Гюйгенсом. Он обнаружил, что маятники двух часов, спустя некоторое время, после того как их повесят рядом на одну стену, начинают качаться полностью синхронно. Когда эти часы поместят на противоположные стены комнаты, явления синхронизации не наблюдается. Очевидно, что синхронизацию колебаний маятников этих часов можно объяснить их влиянием друг на друга через невидимую глазу вибрацию стены, на которой они висят.

Синхронизация представляет собой частный случай эффекта, называемого «захвата фазы» (phase locking.). Когда два одинаковых осциллятора связаны друг с другом, есть две возможности их совместного движения: когда разность фаз их колебаний равна нулю (синхронизация) и когда разность фаз равна 180 градусам (антисинхронизация). Если сеть связанных осцилляторов содержит больше двух осцилляторов, то число возможностей увеличивается. В живой природе, в технике и в искусстве чаще всего мы имеем дело с большим числом связанных осцилляторов, и здесь обычно реализуется именно синхронный тип поведения.

Синхронизация играет важнейшую роль в пространственно-временной организации одно- и многоклеточных организмов. Синхронно делятся клетки на ранних стадиях эмбрионального развития. Волокна сердечной мышцы также сокращаются синхронно. Синхронизация наблюдается в полете стай птиц и движении косяков рыб: взмахи крыльев и плавников происходят синхронно. Впечатляющим примером явления синхронизации в живой природе может служить согласованно вспыхивающее свечение многих сотен тысяч светлячков, которые обычно собираются в огромных количествах на берегах рек в Южной Азии.

В больших техногенных системах примером спонтанной синхронизации может служить работа генераторов сети электростанций. Все электростанции, независимо от вида потребляемой ими энергии (уголь, газ, мазут, атомная или гравитационная энергия) производят переменный электрический ток строго определенной частоты (в большинстве стран, в том числе и в России, 50 герц) [Strogatz, 2003]. При этом все генераторы, производящие этот ток, синхронизируют скорость и фазу вращения подобно тому, как синхронизируются вспышки у светлячков в описанном выше примере.

Математический анализ поведения сети большого числа связанных осцилляторов показывает, что легче всего режим синхронизации наступает в том случае, когда на каждый отдельный осциллятор влияет уже сформировавшийся ритм окружающих его осцилляторов. В случае светлячков это условие, видимо, удовлетворяется, и каждый светлячок подстраивается под уже сформировавшийся ритм своих соседей. Очевидно, эти условия выполняются во многих случаях синхронного поведения и в социальной системе: строе солдат, идущих в ногу хоровом пении, танцах, овациях и скандировании в концертном зале и т. д.

Когда имеется небольшой разброс частот в сети связанных осцилляторов, процесс их взаимной синхронизации очень напоминает фазовый переход, в котором роль температуры играет ши-

рина полосы частот осцилляторов в сети. В предложенной Курамото [Kuramoto, 1984] модели коллективной синхронизации каждый i осциллятор описывается фазой θ_i , а сам процесс синхронизация описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Параметр K/N определяет силу связи между осцилляторами. Собственные частоты ω_i осцилляторов подчиняется распределению Лоренца

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi[\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2]},$$

ширина которого равна γ , а среднее значение частоты равно ω_0 .

В качестве параметра порядка $r(t)$ вводится мера синхронизации системы

$$r(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \right|.$$

Если все частоты различны, то в каждый момент времени все фазы равномерно распределены на интервале $[0, 2\pi]$ и параметр порядка равен нулю. Если же несколько осцилляторов в ансамбле синхронизируются на некоторой частоте, то их фазы складываются и возникает ненулевой параметр порядка.

В пределе $N \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ для параметра порядка получаются следующие значения:

$r = 0$, если $K < K_c$ (полная десинхронизация),

$r = \sqrt{1 - (K_c / K)}$, если $K > K_c$,

$K_c = 2\gamma$.

То есть критический индекс для параметра порядка равен $1/2$.

Таким образом, система связанных осцилляторов десинхронизирована, пока сила связи между осцилляторами не превышает критического значения, пропорционального удвоенной ширине разброса частот. После этого в системе связанных осцилляторов появляется «островок синхронизации», размер которого растет по мере роста силы связи между осцилляторами. В предельном случае бесконечно большой силы связи все осцилляторы будут колебаться синхронно.

Д. Воттс [Watts, 1999] первым исследовал свойства синхронных состояний в сетях, обладающих свойством тесного мира. В дальнейшем было изучено возникновение синхронизации в модели Курамото, когда осцилляторы помещены в узлы безмасштабной сети. Численное моделирование показывает, что критическое значение силы связи между осцилляторами, при которых наступает синхронизация, в сетях с безмасштабной структурой заметно меньше, чем в сетях с регулярной или хаотической структурой.

Исследования также показали, что синхронизация в безмасштабных сетях не разрушается, если случайным образом удалить 5 % узлов. Если же удалить 1 % узлов с наибольшим числом связей, синхронизация в такой сети исчезает. Кроме того, на синхронное поведение в сетевых структурах сильно влияет весовое распределение связей между узлами.

Гомез-Гарденес с сотрудниками исследовали особенности процессов эволюции синхронизации и возникновения паттернов синхронизации в случайной сети типа Эрдеша–Реньи и безмасштабных сетевых структурах [Gomez-Gardenes et al, 2007]. Они численно проинтегрировали уравнение Курамото для сетевых структур:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + J \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i),$$

где a_{ij} – коэффициенты матрицы смежности для соответствующей сети, J – сила связи между осцилляторами, $N=1000$. Расчеты показали, что синхронизация в безмасштабных сетях происходит при более низких значениях J_c , чем в случайных сетях Эрдеша–Реньи, а сам фазовый переход в случайных сетях более резкий, чем в безмасштабных сетях.

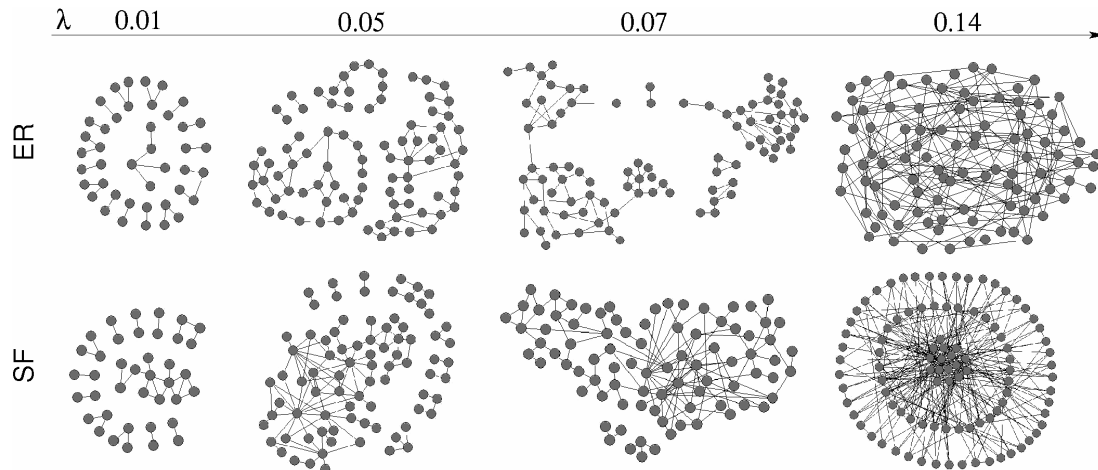


Рис. 8. Паттерны синхронизации в сети Эрдеша–Реньи (ER) и в безмасштабной сети (SF) для нескольких значений силы связи между осцилляторами λ (в наших обозначениях – параметра J). Reprinted with permission from Gomez-Gardenes J., Moreno Y., Arenas A. Paths synchronization on complex networks // Phys. Rev. Lett. 98, 034101. © 2007 by the American Physical Society

Исследовались также процессы формирования областей синхронизации соседних осцилляторов для нескольких значений J в обоих типах сетей (рисунок 8), и было обнаружено качественное различие у этих двух типов сетевых структур.

В безмасштабных сетях основные ядра синхронизации формируются хабами, которые поглощают соседние малые кластеры. В сетях Эрдеша–Реньи многочисленные маленькие кластеры синхронизации до возникновения фазового перехода распределены довольно однородно по всему графу.

Есть данные, что некоторые расстройства психической деятельности являются следствием аномальной и иногда внезапной синхронизации большого числа популяций нейронов. Поэтому исследования влияния свойств сетевых структур на генерацию, поддержание и распространение режима синхронизации очень важны для современной науки о мозге.

Самоорганизованная критичность

При фазовых переходах критическое состояние системы достигается за счет определенной настройки управляющих параметров – например, при определенных соотношениях между температурой и давлением. Существует, однако, класс сложных систем с большим числом степеней свободы, которые выходят на критический режим по самой своей природе, в результате присущих этим системам внутренних тенденций эволюции. Критические состояния таких систем не требуют точной настройки внешних управляющих параметров и по сути дела обладают свойством самоподдержки [Bak, 1996].

Физической моделью явления самоорганизованной критичности является куча песка. Если сверху на ровную горизонтальную поверхность тонкой струйкой будут сыпаться песчинки, то на горизонтальной поверхности постепенно будет расти песчаный холм. Песчинки, падающие сверху на склон холма, будут оставаться в том месте, куда они упали до определенного критического значения крутизны холма. Выше некоторого порогового (критического) значения угла склона холма песчинки будут скатываться вниз, увлекая за собой другие песчинки на своем пути и образуя сход песчаных лавин различных размеров.

Такой сценарий достижения критического состояния получил название самоорганизованной критичности. Как показывают исследования, такие системы имеют стандартный спектр

флуктуаций. Например, размеры лавин в модели «куча песка» распределены по закону:

$$p(s) \propto s^{-\tau},$$

где $p(s)$ – вероятность формирования лавины, размер которой s , а τ – критический индекс. Такие процессы самоорганизованной критичности могут генерировать сетевые структуры сложной архитектуры [Bak, 1996; Lee et al, 2004].

К. Нагель и М. Пажуцки использовали модель самоорганизованной критичности при изучении функции распределения времени для автомобильных «пробок» на автодорогах и обнаружили, что это распределение, как и распределение лавин по продолжительности, хорошо описывается степенным законом с показателем равным $3/2$ [Nagel, Paczuski, 1995].

Каскадные повреждения и распространение инфекций

В сложных природных и техногенных системах, а также в самом обществе могут возникать катастрофические нарастающие явления, инициированные небольшой долей составляющих эти сложные системы элементов. Примерами таких лавинообразных процессов могут служить неожиданные эпидемии заболеваний или каскадное отключение электричества, как это имело место, например, на западе США и Канады 14 августа 2003 года при повреждении на одной из электростанций в Огайо, когда миллионы людей около 15 часов оставались без света. Из рисунка 9 видно, что вероятность возникновения таких отключений в зависимости от их размеров имеет приблизительно степенной закон, то есть каскадные процессы относятся к феноменологии критических явлений [Dobson et al, 2007]. Аналогичные закономерности были получены при анализе статистических данных каскадных отключений в Швеции, Норвегии, Китае и Южной Зеландии.

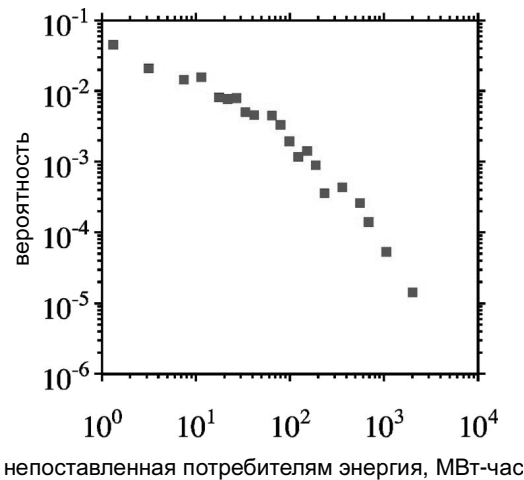


Рисунок 9. Функция распределения вероятности отключения электроэнергии при каскадном повреждении с сети электростанций северной части США за период с 1984 по 1998 года в зависимости от размера повреждений (энергии, непоставленной потребителям). Обе координаты даны в логарифмическом масштабе. Reprinted with permission from Dobson I., Carreras B., Newman D. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization. // Chaos, 17, 026103. © 2007, American Institute of Physics

Возникновение каскадных процессов не всегда имеет негативный смысл. Примерами могут служить информационные каскады, делающие в течение короткого промежутка времени популярными (хитами) книги, кинокартины, песни, актеров, певцов и их альбомы. Таким образом, понимание и предсказание распространения таких каскадных лавинных процессов в сложных системах представляет несомненный интерес.

Каскадные отключения в сети электростанций есть результат лавинообразного распространения перегрузки, возникшей в одном из узлов этой сети. Моттер и Лэй предложили про-

стую модель этого процесса [Motter, Lai, 2002]. Нагрузка узла сети в этой модели – это та нагрузка узла (betweenness centrality), определение которой было дано выше, (то есть число кратчайших путей между другими узлами, проходящих через данный узел). Для каждого узла i этой сети вводится предельная нагрузка – емкость узла:

$$c_i = (1 + \alpha)b_{oi},$$

где b_{oi} – нагрузка (betweenness centrality) этого узла в неповрежденной сети, а константа $\alpha \geq 0$ есть «параметр устойчивости», показывающий насколько первоначальная нагрузка может быть превышена. Каскадное отключение в этой модели выглядит следующим образом:

1. Удаляем узел. Это приводит к перераспределению нагрузок у других узлах: $b_{oi} \rightarrow b'_{oi}$.
2. Удалить все перегруженные узлы, то есть узлы, для которых $b_{oi} > c_i$.
3. Повторять эту процедуру до тех пор, пока остаются перегруженные узлы.

При моделировании этого процесса в различных сетях Моттер и Лей вычисляли отношение $G = N_{after} / N$, где N и N_{after} – соответственно начальное число узлов и размер наибольшей связанной компоненты после каскадного отключения (имея в виду, что начальное число узлов совпадает с гигантской связанной компонентой первоначальной сети). Результирующее значение $G(\alpha)$ зависит от архитектуры сети, параметра α и характеристик первого отключенного узла, в первую очередь от его степени, то есть числа связей. В случайном графе для любого значения $\alpha > 0$ $G = 1$ и только если $\alpha = 0$, сеть полностью выведена из строя, $G = 0$.

С другой стороны, в сетях со степенным законом распределения узлов по числу связей величина G строго зависит от степени, а также от нагрузки первого удаленного узла. Моттер и Лэй исследовали свойства безмасштабной сети с $\lambda = 3$. Значение $\alpha = 0$ дает $G = 0$ при любом начальном узле для любой сети, в то время как $\alpha \rightarrow \infty$ дает $G = 1$. Вопрос заключается в том, как выглядит зависимость $G(\alpha)$ при промежуточных значениях α . Когда первый удаляемый узел выбирается случайно, каскад будет большим (G сильно отличается от единицы) только при малых значениях α , а $G(\alpha)$ быстро растет при изменении α от 0 до 1. Если же начальный узел выбран среди хабов, то G растет медленно с ростом α , а каскады могут быть очень большими даже при относительно больших значениях α .

Ли с сотрудниками численно исследовали статистику каскадов этой модели на безмасштабных сетях с $2 < \lambda \leq 3$ и обнаружили, что в этом случае имеется критическая точка $\alpha_c \approx 0.15$ [Lee et al, 2005]. При $\alpha < \alpha_c$ развиваются гигантские лавины, а при $\alpha > \alpha_c$ размеры лавин существенно меньше. В самой критической точке распределение лавин по размерам подчиняется степенному закону $P(s) \propto s^{-\tau}$, где $\tau \approx 2.1$ во всем диапазоне $2 < \gamma \leq 3$.

С. Буддырев с коллегами исследовали поведение сложной системы, состоящей из двух сетей A и B , причем определенная доля узлов сети A связана с узлами сети B , а некоторая доля узлов сети B связана с узлами сети A [Buldyrev et al, 2010]. Если узлы в одной из этих сетей выходят из строя, это может вызвать выход из строя узлов в другой сети, а это повлечет за собой итерационное каскадное повреждение узлов в обеих сетях. Достигнув определенного критического значения отношения вышедших из строя узлов к общему числу узлов, происходит перколяционный фазовый переход первого рода, когда возникает скачкообразный полный распад и выход из строя обеих сетей A и B , а значит, и всей системы в целом. Численные и аналитические исследования показывают, что при уменьшении силы связи между узлами A и B происходит переход от перколяционного фазового перехода первого рода к переходу второго рода.

Как говорилось выше, безмасштабные сети очень устойчивы к случайным повреждениям. Однако если сложная сеть состоит из двух и более тесно связанных между собой безмасштабных сетей, то в такой системе полная фрагментация наступает выше некоторой достаточно малой доли удаленных (отключенных) узлов и такой переход также происходит скачком, как в переходах первого рода.

В реальных сетях такого рода каскадные отключения произошли в Италии 28 сентября 2003 года, когда повреждения на электростанциях вызвало отключение некоторых узлов сети Интернет, что в свою очередь вызвало дальнейшее отключение электростанций [Buldyrev et al, 2010]. В живых системах также возможны такого рода сценарии, поскольку любой организм представляет собой иерархию взаимодействующих между собой генетических, гормональных, нейронных сетевых структур [Терёхин и др., 2009].

Заключение

В современной теории сложных сетей сформировалось несколько важных фундаментальных и прикладных направлений исследований. Ситуацию, сложившуюся в фундаментальных направлениях теории сложных сетей, некоторые исследователи сравнивают с ситуацией в квантовой механике перед открытием уравнения Шредингера [Neuman, 2008]. Ожидается, что в ближайшем будущем может быть преодолен разрыв между обнаруженными здесь универсальными эмпирическими закономерностями в сетевых структурах реальных объектов и пониманием самой природы сложных систем, способностью прогнозировать их поведение.

В прикладных исследованиях также можно ожидать прорыва в ряде направлений, например в исследованиях по безопасности сложных технических объектов, в изучении различных функциональных состояний мозга, а также существенного прогресса в тех гуманитарных науках (например в изучении искусства и культуры), где до последнего времени отсутствовали адекватные количественные методы.

Автор выражает глубокую благодарность А. М. Валуеву за обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

Сайт <http://arXiv.org> представляет собой один из самых больших электронных архивов статей по физике, математике и информатике. Большинство статей по сложным сетям можно найти в секциях physics и cond-mat этого архива.

- Albert R., Barabasi A.-L. 2002, Statistical mechanics of complex networks, // *Rev. Mod. Phys.* 74, 47; arXiv:cond-mat/0106096.
- Bak P. How Nature Works. Copernicus, New York 1996.
- Barabasi A.-L. LINKED: the new science of networks. Perseus, Cambridge, MA, 2002.
- Barabasi A.-L., Olvai Z. N. 2004, Network biology: understanding the cell's functional organization. *Nature Review. Genetics*. 5, February, 101–114.
- Boccatti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.-U. Complex Networks: Structure and Dynamics. // *Physics Reports*, 424(2006), 175–308.
- Bollobas B., Riordan O. M. 2002, Mathematical results on scale free random graphs, in *Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet* (S. Bornholdt and H. G. Schuster, eds.), Wiley-VCH, Berlin.
- Buldyrev S., Parshani R., Paul G., Stanley H., Havlin Sh. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. // *Nature*, Vol. 464|15 April 2010, pp.1025–1028.
- Chialvo D. Emergent complexity: what uphill analysis or downhill invention cannot do; *New Ideas in Psychology* (2007), doi:10.1016/j.newideapsych.2007.07.013.
- Choi Y.-M., Kim H.-J. A directed network of Greek and Roman mythology // *Physica A* 382 (2007) 665–671.
- Dobson I., Carreras B., Newman D. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization. // *Chaos*, 17, 026103, (2007).
- Dorogovtsev S. N. Goltsev A. V., Mendes J. F. F. Critical phenomena in complex networks. // *Rev. Mod. Phys.* 80, 1275 (2008). arXiv:0705.0010v6 [cond-mat.stat-mech].

- Dorogovtsev S. N. Lectures on Complex Networks, Oxford University Press, Oxford, 2010.
- Dorogovtsev S. N., Mendes J. F. F. 2003, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, Oxford.
- Euler L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis // *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741, pp. 128–140.
- Farkas I., Derenyi I., Palla G., Vicsek T. 2004, Equilibrium statistical mechanics of network structures, in *Networks: structure, dynamics, and function* (E. Ben-Naim, H. Frauenfelder, and Z. Toroczkai, eds.), Springer, Berlin; arXiv:cond-mat/0401640.
- Gomez-Gardenes J., Moreno Y., Arenas A. 2007, Paths synchronization on complex networks. // *Phys. Rev. Lett.* **98**, 034101.
- Guare J. Six Degrees of Separation. Vintage Books, New York, 1990.
- Kleinberg J. M. Navigation in a small world. // *Nature*, 406, 845, (2000).
- Krzywicki A. 2003, On the geometry of random networks, // *Acta Phys. Polon. B* 34, 4965; arXiv:cond-mat/0306482.
- Kuramoto, Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer, New York, 1984.
- Lee D.-S., Goh K.-I., Kahng B., Kim, D. 2004, Sandpile avalanche dynamics on scale-free networks, arXiv:cond-mat/0401531.
- Lee E. J., Goh K.-I., Kahng B., Kim D. 2005, Robustness of the avalanche dynamics in data packet transport on scale-free networks. *Phys. Rev. E* **71**, 056108.
- Liu X., Tse C. K., Small M. Complex network structure of musical compositions: Algorithmic generation of appealing music. // *Physica A* 389 (2010) 126–132.
- Milgram S. The small world problem // *Psychology Today*. 1967. № 2. P. 60–67.
- Motter A. E., Lai Y.-C. 2002. Cascade-based attacks on complex networks. // *Phys. Rev. E*, **66**, 065102.
- Nagel K., Paczuski M. Emergent Traffic Jams. // *Phys. Rev. E* 51 (1995), 2909–2918.
- Newman M. E. J. The Physics of Networks. // *Physical Today* (2008), November, pp. 33–38
- Newman M. E. J. 2003, Mixing patterns in networks. // *Phys. Rev. E* **67**, 026126, arXiv:cond-mat/0209450.
- Newman M. E. J., Girvan M. 2004, Finding and evaluating community structure in networks, // *Phys. Rev. E* 69, 026113; arXiv:cond-mat/0308217.
- Strogatz S. Sync. Hyperion books, New York, 2003.
- Wang P., Gonzalez M. C. Hidalgo C. A., Barabasi, A.-L. Understanding the spreading patterns of mobile phone viruses, // *Science*, 324, 1071–1076 (2009).
- Watts D. J. Small worlds: the dynamics of networks between order and randomness. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.
- Watts D. Six degrees. W. W. Norton & Company, New York, 2004.
- Капица С. П. Гиперболический путь человечества. Москва, издательский дом ТОНЧУ, 2009.
- Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва, Техносфера, 2003.
- Терёхин А. Т., Будилова Е. В., Карпенко М. П., Качалова Л. М., Чмыхова Е. В. Функция Ляпунова как инструмент исследования когнитивных и регуляторных процессов организма. // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2009. Т. 1 № 4. С. 449–456.