**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 Т. 2 № 1 С. 13–17**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.91.1

Блуждающие симметрии уравнений Лагранжа

Г. Н. Яковенко

Московский физико-технический институт (государственный университет),
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: yakovenko_g@mtu-net.ru

Получено 20 марта 2010 г.

Динамический процесс в равной степени адекватно моделируется семейством уравнений Лагранжа. Группа симметрий блуждает по этому семейству: системы переходят одна в другую. При определенных условиях по нескольким таким группам простыми вычислениями можно получить первый интеграл. Основная цель работы – показать полезность понятия блуждающей симметрии. Рассмотрен пример: плоское движение заряженной частицы в магнитном поле при наличии вязкого трения. При помощи трех блуждающих симметрий вычисляется первый интеграл.

Ключевые слова: уравнения Лагранжа, вариационные симметрии, дивергентные симметрии, конформные симметрии, блуждающие симметрии, первые интегралы

Wandering symmetries of the Lagrange's equations

G. N. Yakovenko

*Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutskii pereulok, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia*

Abstract. – The dynamic process can be in equal degree adequately prototyped by a family of Lagrange's systems. Symmetry group ‘wanders’ on this family: systems are transformed from one into another. In this work we show that under determined condition the first integral can be obtained by a simple calculations on some of such groups. The main purpose of the work is to show usefulness of wandering symmetry concept. The considered example: flat motion of a charged particle in magnetic field in presence of viscous friction. With the help of three wandering symmetry first integral is calculated.

Keywords: the Lagrange's equations, variational symmetries, divergental symmetries, conformal symmetries, wandering symmetries, the first integrals

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 13–17 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00217) и Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (проект 2.1.1/3604).

Введение

Однопараметрическая группа

$$\tilde{t} = \tilde{t}(t,q,\tau), \quad \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t,q,\tau), \quad i = 1,\ldots,n \tag{1}$$

(τ – групповой параметр) и уравнения Лагранжа (лагранжева система) с функцией Лагранжа (лагранжианом) $L(t,q,\dot{q})$ связаны соотношением

$$L\left(\tilde{t},\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt} = c(\tau)L\left(t,q,\frac{dq}{dt}\right) + \frac{dR(t,q,\tau)}{dt}, \tag{2}$$

где $c(\tau)$ и $R(t,q,\tau)$ – некоторые функции своих переменных. Если в (2) $c(\tau) \neq 1,\, R(t,q,\tau) \equiv 0,$ группа (1) называется группой *конформных симметрий* лагранжевой системы [Олвер, 1989]. В случае $c(\tau) \equiv 1,\, R(t,q,\tau) \neq 0$ группа (1) называется группой *дивергентных симметрий* [Олвер, 1989]. Если же в (2) $c(\tau) \equiv 1,\, R(t,q,\tau) \equiv 0,$ то симметрии называются *вариационными* [Олвер, 1989]. В последних двух случаях – дивергентные или вариационные симметрии – по уравнениям группы (1) и функции $L(t,q,\dot{q})$ простыми вычислениями строится первый интеграл (теорема Э. Нётер и её обобщение [Олвер, 1989; Овсянников, 1978; Яковенко, 1986; Яковенко, 1993; Яковенко, 2006; Гараев, 2005]):

$$w = \sum_{i=1}^{n} p_i \eta_i - \xi H - r = \text{const}, \tag{3}$$

где

$$\xi(t,q) = \frac{\partial \tilde{t}(t,q,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}, \quad \eta_i(t,q) = \frac{\partial \tilde{q}_i(t,q,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} \tag{4}$$

– коэффициенты инфинитезимального оператора группы (1),

$$r(t,q) = \frac{\partial R(t,q,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}$$

– порождение дивергентного слагаемого в (2),

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \tag{5}$$

– обобщенные импульсы и функция Гамильтона, соответствующие лагранжиану $L(t,q,\dot{q})$.

Ситуация, когда динамический процесс в равной степени адекватно моделируется семейством лагранжевых систем – представителей семейства определяют параметры $\alpha \in \Re^m$ в лагранжиане $L(t,q,\dot{q},\alpha)$, – приводит к понятию блуждающей симметрии. Однопараметрическая группа (1) называется группой *блуждающих симметрий* лагранжевой системы, если группа (1) и функция $L(t,q,\dot{q},\alpha)$ связаны соотношением [Яковенко, 1986; Яковенко, 1993; Яковенко, 2006]

$$L\left(\tilde{t},\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}},\alpha\right)\frac{d\tilde{t}}{dt} = L\left(t,q,\frac{dq}{dt},\varphi(\alpha,\tau)\right), \tag{6}$$

где $\varphi(\alpha,\tau)$ – некоторая вектор-функция[1]. Показывается [Яковенко, 1986; Яковенко, 1993; Яковенко, 1997; Яковенко, 2006], что конформные и дивергентные симметрии переходом от лагранжиана $L(t,q,\dot{q})$ к другому эквивалентному сводятся к блуждающим. Доказывается [Яковенко, 1986; Яковенко, 1993; Яковенко, 2006], что в случае (6) для вычисления первого интеграла может потребоваться несколько групп (1) блуждающих симметрий. Приведем алгоритм вычисления первого интеграла по уравнениям (1) групп блуждающих симметрий.

[1] Близкое понятие (L^* -инвариантность) введено в [Гараев, 2005].

Алгоритм

а) Из теории [Яковенко, 1993; Яковенко, 2006] следует, что вектор-функция $\varphi(\alpha,\tau)$, входящая в определение (6) блуждающей симметрии, также определяет группу $\tilde{\alpha}_l = \varphi_l(\alpha,\tau)$ преобразований параметров $\alpha \in \Re^m$. Вычисляются коэффициенты ее инфинитезимального оператора

$$\psi_l(\alpha) = \left.\frac{\partial \varphi_l(\alpha,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}. \tag{7}$$

б) Пусть имеется несколько групп блуждающих симметрий, и у системы (k – номер группы, $k = 1, \ldots, r$)

$$\sum_{k=1}^{r} \psi_{lk(\alpha)h_k(\alpha)=0,\quad l=1,\ldots,m,} \tag{8}$$

есть нетривиальное решение $h_k(\alpha)$.

в) Функция

$$w = \sum_{k=1}^{r} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \eta_{ik} - \xi_k H \right\} h_k(\alpha) = \text{const} \tag{9}$$

есть первый интеграл лагранжевой системы. В (9) использованы обозначения (4), (5).

Пример

Плоское движение заряженной частицы в магнитном поле при наличии вязкого трения определяется уравнениями Ньютона

$$\begin{aligned} f_1 &= \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \omega\dot{y} = 0, \\ f_2 &= \ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega\dot{x} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

которые не являются уравнениями Лагранжа. Уравнениям (10) эквивалентно двухпараметрическое семейство (параметры α и β) уравнений Лагранжа

$$\sum_{k=1}^{2} a_{ik} f_k = 0,\quad i = 1,2, \tag{11}$$

которому соответствует семейство функций Лагранжа

$$L(t,x,y,\dot{x},\dot{y},\alpha,\beta) = \frac{1}{2}[(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)\cos(\omega t + \alpha) - 2\dot{x}\dot{y}\sin(\omega t + \alpha)]e^{2\gamma t+\beta} \tag{12}$$

и матрица в (11)

$$\|a_{ik}\| = \begin{Vmatrix} \cos(\omega t + \alpha) & -\sin(\omega t + \alpha) \\ -\sin(\omega t + \alpha) & -\cos(\omega t + \alpha) \end{Vmatrix} e^{2\gamma t+\beta}$$

(система (10) и функция Лагранжа (12) при $\alpha = 0,\ \ \beta = 0$ приведены в [Додонов и др., 1980]). Система (10) допускает пятипараметрическую группу симметрий, однопараметрические подгруппы которой легко усматриваются из вида уравнений (10) и физической сути сил. Сдвиги по каждой из координат – $\tilde{x} = x + \tau_{1,}\ \ \tilde{y} = y + \tau_2$ – вариационные симметрии, что приводит к первым интегралам (3) (в (3) $r = 0$):

$$\begin{aligned} w_x = p_x &= \ \ [\dot{x}\cos(\omega t + \alpha) - \dot{y}\sin(\omega t + \alpha)]e^{2\gamma t+\beta} = C_x, \\ w_y = p_y &= -[\dot{x}\sin(\omega t + \alpha) + \dot{y}\cos(\omega t + \alpha)]e^{2\gamma t+\beta} = C_y. \end{aligned} \tag{13}$$

Остальные три группы симметрий – блуждающие. Приведем для каждой из групп: ее уравнения (1), коэффициенты (4) оператора, функции φ_α и φ_β в (6), соответствующие функции ψ_α и ψ_β (см. (7)).

1. Растяжение координат:

$$\tilde{t} = t, \qquad \tilde{x} = xe^{\tau}, \qquad \tilde{y} = ye^{\tau};$$
$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_{x1} = x, \qquad \eta_{y1} = y;$$
$$\varphi_{\alpha 1} = \alpha, \qquad \varphi_{\beta 1} = \beta + 2\tau;$$
$$\psi_{\alpha 1} = 0, \qquad \psi_{\beta 1} = 2.$$

2. Поворот вокруг начала координат:

$$\tilde{t} = t,$$
$$\tilde{x} = x\cos\tau - y\sin\tau,$$
$$\tilde{y} = x\sin\tau + y\cos\tau;$$
$$\xi_2 = 0, \qquad \eta_{x2} = -y, \qquad \eta_{y2} = x;$$
$$\varphi_{\alpha 2} = \alpha + 2\tau, \qquad \varphi_{\beta 2} = \beta;$$
$$\psi_{\alpha 2} = 2, \qquad \psi_{\beta 2} = 0.$$

3. Сдвиг по времени:

$$\tilde{t} = t + \tau, \qquad \tilde{x} = x, \qquad \tilde{y} = y;$$
$$\xi_3 = 1, \qquad \eta_{x3} = 0, \qquad \eta_{y3} = 0;$$
$$\varphi_3 = \alpha + \omega\tau, \qquad \varphi_{\beta 3} = \beta + 2\gamma\tau;$$
$$\psi_{\alpha 3} = \omega, \qquad \psi_{\beta 3} = 2\gamma.$$

Уравнения (8) имеют вид

$$\begin{aligned} 2h_2 + \omega h_3 &= 0, \\ 2h_1 + 2\gamma h_3 &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

С использованием нетривиального решения $h_1 = 2\gamma,\ h_2 = \omega,\ h_3 = -2$ вычисляем функционально независимый от (13) первый интеграл (9)

$$w = (2\gamma x - \omega y)p_x + (\omega x + 2\gamma y)p_y + 2H = C,$$

где p_x, p_y приведены в (13), а H (в данном случае $H = L$) – в (12).

Отметим, что ни одна пара из трех приведенных групп блуждающих симметрий первый интеграл не создаст: устранение одной из групп эквивалентно тому, что в (14) для одной из переменных кладется $h_k = 0$, прочие переменные при этом также равны нулю, т. е. единственное решение уравнений (14) – $h_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,$ а первый интеграл (9) – тривиальный.

Список литературы

Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.

Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

Яковенко Г. Н. Закон сохранения в механической системе как следствие двух симметрий // VI Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: Аннот. докладов. Ташкент, 1986. С. 664.

Яковенко Г. Н. «Блуждающие» симметрии в уравнениях динамики // Проблемы математики в физико-технических и экономических задачах: Межвед. сб. науч. тр. М., 1993. С. 170–185.

Яковенко Г. Н. Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа. – М.: Изд. МЗ пресс, 2006. 120 с.

Гараев К. Г. Теория инвариантных вариационных задач в проблеме оптимального управления: Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2005. 152 с.

Яковенко Г. Н. Конформные и дивергентные симметрии как частный случай блуждающих // VII Четаевская конф. «Аналитическая механика, устойчивость движения, управление движением»: Тез. докл. Казань, 1997. С. 327.

Додонов В. В., Манько В. И., Скаржинский В. Д. Произвол в выборе действия и неоднозначность квантования заданных классических уравнений движения // Теоретико-групповые методы в физике: Тр. межд. Семинара, Звенигород, 28–30 ноября 1979 г. М.: Наука, 1980. Т. 1. С. 262–273.